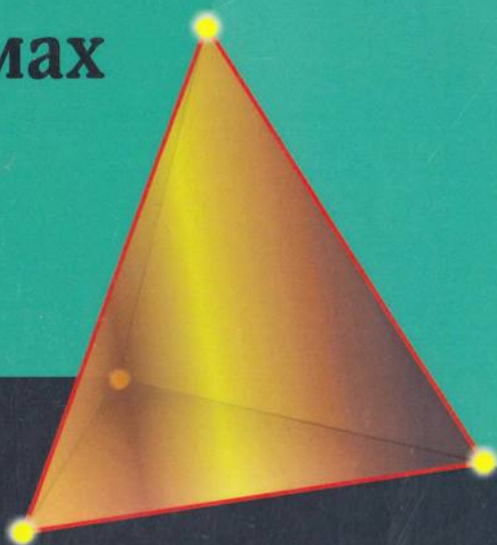


С. Б. Гашков

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ НЕРАВЕНСТВА

Путеводитель
в задачах
и теоремах



Более **600**
задач и теорем



С. Б. Гашков

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ НЕРАВЕНСТВА

***Путеводитель
в задачах и теоремах***



**URSS
МОСКВА**

Гашков Сергей Борисович

Геометрические неравенства: Путеводитель в задачах и теоремах.
М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2013. — 256 с.

Книга содержит более 600 задач и теорем, посвященных геометрическим неравенствам, в основном для выпуклых многоугольников и многогранников. Среди задач есть как легкие, так и трудные; часть задач в разное время предлагались на математических олимпиадах для школьников. К некоторым задачам даны указания, а иногда и полные решения.

Книга предназначена для учащихся, но может быть интересна учителям, студентам и всем, кто интересуется математикой. Содержащиеся в ней задачи могут использоваться в работе математических кружков. Решая их, учащиеся познакомятся с доказательствами интересных геометрических теорем, сильно отличающихся от известных им по школьному курсу, и даже смогут попробовать решить еще никем не решенные задачи.

Издательство «Книжный дом «ЛИБРОКОМ»».

117335, Москва, Нахимовский пр-т, 56.

Формат 60х90/16. Печ. л. 16. Зак. № ВУ-47.

Отпечатано в ООО «ЛЕНАНД»

117312, Москва, пр-т Шестидесятилетия Октября, 11А, стр. 11.

ISBN 978-5-397-03914-7

© Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2013

Все права защищены. Никакая часть настоящей книги не может быть воспроизведена или передана в какой бы то ни было форме и какими бы то ни было средствами, будь то электронные или механические, включая фотокопирование и запись на магнитный носитель, а также размещение в Интернете, если на то нет письменного разрешения владельца.

Оглавление

1	Неравенства для треугольников, четырехугольников и многоугольников	9
1.1	Простейшие задачи на максимум и минимум . . .	9
1.2	Выпуклые многоугольники	12
1.3	Неравенства для треугольников	19
1.4	Экстремальные свойства правильного треугольника	28
1.5	Доказательство теоремы об экстремальных свойствах правильного треугольника	31
1.6	Опять неравенства для треугольников	48
1.7	Неравенства для четырехугольников	53
1.8	Теоремы Юнга, Бляшке и Пала	60
1.9	Неравенства для выпуклых многоугольников	64
2	Неравенства для выпуклых многоугольников, фигур и тел	76
2.1	Экстремальные свойства выпуклых многоугольников	76
2.2	Экстремальные точки в выпуклых многоугольниках	84
2.3	Быстрое вычисление различных мер для выпуклых многоугольников	107
2.4	Симметризация по Минковскому	121
2.5	Изодиаметрические неравенства	125

2.6	Экстремальные многоугольники Рейнхардта	128
2.7	Изопериметрические неравенства для выпуклых фигур	146
2.8	Симметризация по Штейнеру	149
2.9	«Задача Дидоны»	157
2.10	Фигуры постоянной ширины	160
2.11	Метод усреднения	164
2.12	Задачи о диаметрах	174
2.13	Задача Лебега о покрывках для фигур данного диаметра	184
2.14	Задача Борсука	187
2.15	Приближение выпуклых фигур многоугольниками	191
2.16	Линейные системы выпуклых фигур и смешанные площади	202
2.17	Неравенство Брунна—Минковского	206
2.18	Неравенства для выпуклых фигур с тремя линейными мерами	210
2.19	Неравенства для тетраэдра	220
2.20	Неравенства для параллелепипеда	235
2.21	Некоторые теоремы о выпуклых многогранниках и телах	239

Литература	249
-------------------	------------

Введение

Некоторым читателям тема этой книжки покажется на первый взгляд странной, так как объединяет вместе совершенно разные и далекие друг от друга понятия. Действительно, часть учащихся считает, что алгебра и геометрия — совершенно разные науки, и ничего общего между ними нет. Но это, конечно, неверно. Есть много пунктов, в которых алгебра соприкасается с геометрией. Один из них — это геометрические неравенства, т.е. неравенства между числовыми мерами (или измерениями) различных геометрических объектов. Более точное определение не имеет смысла здесь указывать, так как далее станет ясно, о чем пойдет речь.

Доказательство неравенств в школе считается трудной и второстепенной темой, учащиеся чаще сталкиваются с равенствами, тождествами, уравнениями. Наверное поэтому, как написали в предисловии к своей книжке «Введение в неравенства» американские математики Беккенбах и Беллман, о математике часто остается впечатление как о науке тавтологической, т.е. доказывающей что предметы равны самим себе. Однако, это не так, и большая часть математических утверждений — это неравенства.

Геометрические неравенства — еще бо́льшая редкость в школе, чем просто неравенства. Отдельные задачи на эту тему рассыпаны по различным книгам и сборникам (например, [15, 19, 20, 31, 32, 39, 45, 51, 52, 53, 47, 48, 49, 66, 72]), в основном олимпиадного характера. Специальных посвященных этой и близким темам книг сравнительно немного (некоторые из них приведены в списке литературы в конце книги, например [9, 12, 10, 14, 25, 26, 37, 42, 40, 56, 60, 69, 73, 74, 77]), не все они рассчитаны на

школьников, и большинство из них издавались давно. Между тем это очень красивая область геометрии (все же скорее это геометрия, чем алгебра), в решениях задач в ней иногда причудливо переплетаются и алгебраические и геометрические рассуждения. Конечно, наиболее привлекательно выглядит использование геометрических рассуждений с минимумом вычислений, но и вычислительные решения часто тоже удовлетворяют всем эстетическим требованиям.

Хотя геометрические неравенства довольно специальная тема, количество различных фактов и задач в ней очень велико, и поэтому для книжки было выбрано сравнительно узкое направление. Центральное положение в ней занимают задачи об экстремальных свойствах многоугольников. Точнее, в ней собраны неравенства, связывающие между собой различные элементы (и числовые характеристики размеров) многоугольника, причем эти неравенства как правило точные, т.е. они обращаются в равенства, причем в основном для правильных многоугольников. Поэтому каждое из этих неравенств соответствует некоторому экстремальному свойству многоугольника, которым обладает, как правило, правильный многоугольник (и изредка некоторые другие).

Частные случаи таких неравенств для треугольника и четырехугольника также представляют интерес и выделены в отдельный раздел, во-первых, потому, что у них есть более простые доказательства (и прежде чем читать раздел о многоугольниках, полезно прорешать задачи про треугольники и четырехугольники), а во-вторых потому, что в этом случае известны разнообразные усиления и уточнения этих неравенств, в которых участвуют высоты, медианы, биссектрисы, средние линии и др. величины, определяемые для треугольников и четырехугольников.

Естественно также наряду с произвольными выпуклыми многоугольниками рассмотреть также произвольные выпуклые фигуры, и этой теме посвящены специальные разделы, в которых, в частности, дается строгое доказательство изопериметрического свойства круга, и рассматриваются различные задачи о возможности накрыть произвольную фигуру многоугольниками данно-

го вида или поместить такие многоугольники в данную фигуру. Эти разделы более сложны для понимания, так как в них используются не совсем элементарные понятия площади и периметра произвольных фигур, но научиться понимать, как решаются подобные задачи, можно и не вдаваясь детали теорий, трактующих понятия площади и длины кривых фигур. Интегральное исчисление в книжке почти нигде даже не упоминается.

Так как среди величин, участвующих в рассматриваемых неравенствах, встречаются диаметр и ширина, то показалось естественным включить в книжку также разделы с разнообразными задачами, связанными с понятием диаметра (например, задачи о покрытиях множеств данного диаметра фигурами разных видов) и задачи о так называемых фигурах постоянной ширины.

Значительная часть планиметрических задач из этой книжки имеет стереометрические аналоги (обобщения), и с целью полноты в нее был включен раздел о неравенствах для произвольных тетраэдра и параллелепипеда, и также раздел о произвольных многогранниках и выпуклых телах (который, ввиду сложности материала, почти не содержит доказательств и носит информативный характер).

Вряд ли здесь собраны все задачи на геометрические неравенства, даже попадающие в указанные выше рамки, но удивительно, как много их оказалось. Поэтому затруднительно изложить их решения в этой книжке из-за ограниченного объема, и многие задачи оставлены читателю для самостоятельного решения. К части задач все же даны более или менее подробные указания.

Особенностью геометрии является множественность доказательств, поэтому для некоторых задач приводились несколько разных решений (в основном по той причине, что более общее утверждение доказывалось совсем не так, как частное), но не было стремления к перечислению всех известных решений и к какой-то классификации различных методов решения подобных задач.

В элементарной геометрии часто трудно установить, кто первый опубликовал теорему, задачу или ее решение, поэтому указания на авторство задач или решений фрагментарны. В целом вся

предлагаемая подборка задач накрывается задачами и теоремами из книг, указанных в списке литературы, но есть и материал, отсутствующий там. Большинство книг из списка литературы, к сожалению, малодоступно для учащихся (либо в силу библиографической редкости, либо в силу особенностей изложения, не ориентированного на школьников) или малоизвестно. Но совсем старые книги (или книги на иностранных языках) в библиографию не включались. Автор надеется, что предлагаемая книжка будет содействовать, в частности, популяризации как замечательных книг из списка литературы, так и всей этой тематики.

Задачи расположены в определенном порядке, и решения следующих задач часто используют предыдущие, поэтому решать их нужно в указанном порядке. Слово задача в формулировках для краткости опущено, а задачи занумерованы сплошной нумерацией. Задачи повышенной сложности отмечены звездочками (особо трудные — несколькими). Если задача предлагалась на олимпиаде, то в скобках указано, когда и где. Если известен ее автор, то иногда указывался он вместо указания на олимпиаду.

Глава 1

Неравенства для треугольников, четырёхугольников и многоугольников

Миром правит геометрия, ибо геометрия —
земное отражение божественного промысла.
Джон Бэнеилл, «Кеплер», 1981

1.1 Простейшие задачи на максимум и минимум

Следующие задачи заимствованы из перевода «Начал» Евклида с комментариями, сделанными профессором Киевского императорского университета М. Е. Ващенко-Захарченко [18]. В этой книге, кстати, есть большая коллекция задач и на другие темы.

❖ 1. Если дана величина двух сторон треугольника, то наибольшая площадь треугольника будет тогда, когда данные стороны составляют прямой угол.

2. Если на данном отрезке взята точка, то произведение ее расстояний до концов отрезка будет наибольшее, когда точка делит отрезок пополам, а сумма квадратов этих расстояний будет наименьшая.

3. Если в произвольном треугольнике одну из сторон поделим пополам и через точку деления проведем параллельные остальным двум сторонам, то образуется вписанный параллелограмм, коего площадь будет наибольшая.

Экстремальные свойства середины дуги окружности

4. Если произвольную точку окружности соединим с концами данной хорды прямолинейными отрезками, то сумма квадратов их длин будет максимальна в середине большей из двух дуг, стягиваемых этой хордой, а минимальна — в середине меньшей из этих дуг.

5. Если произвольную точку данной дуги окружности соединим прямолинейными отрезками с концами стягивающей ее хорды, то сумма их длин, произведение их длин и площадь треугольника, образованного хордой и этими отрезками будет максимальна в середине данной дуги.

6. Если через концы данной дуги окружности проведены к ней касательные, и через внутреннюю точку дуги также проведена касательная, то длина ее отрезка, заключенного между проведенными касательными, как и площадь треугольника, основанием которого служит этот отрезок, а вершиной — центр данной окружности, будет минимальна когда точка является серединой дуги.

7. Если в условиях задачи 6 дуга меньше полуокружности, то площадь треугольника, образованного указанными тремя ка-

сательными, будет минимальна, если выбранная на дуге точка является ее серединой.

☉ 8. Если через концы данной дуги окружности проведены к ней касательные, и из внутренней точки дуги опущены на них перпендикуляры, то произведение их длин будет минимально, когда эта точка совпадает с серединой данной дуги.

Экстремальные свойства прямой, проходящая через данную точку внутри угла

☉ 9. Из всех прямых, проходящих через данную точку, и образующих с двумя данными прямыми треугольники, наименьшую площадь имеет тот из них, который образован прямой, делящейся в данной точке пополам.

☉ 10. Внутри данного угла дана точка, через которую проведена прямая, пересекающая стороны угла. Произведение двух отрезков, которые отсекаются на этой прямой данной точкой и сторонами угла, будет максимальным у прямой, образующей со сторонами данного угла равнобедренный треугольник.

Два пересекающихся круга

☉ 11. Через точку пересечения двух кругов проведена прямая. Произведение хорд данных кругов, лежащих на этой прямой, будет максимально у прямой, образующей равные углы с касательными к этим кругам в точках пересечения с рассматриваемой прямой.

☉ 12. Из всех прямых, проходящих через одну из точек пересечения двух кругов, наибольший отрезок, заключенный между данными кругами, будет у той прямой, которая перпендикулярна общей хорде кругов, а наибольшая площадь будет у треугольника, основанием которого будет указанный наибольший отрезок, а вершина в другой точке пересечения кругов.

1.2 Выпуклые многоугольники

Примерами выпуклых многоугольников являются треугольники, параллелограммы и трапеции, известные всем по школьным учебникам. Некоторые слышали также про правильные многоугольники.

Дадим общее определение, даже два. *Многоугольником* называется конечная часть плоскости, ограниченная замкнутой непересекающейся ломаной линией. *Ломаная линия* — это кривая линия, состоящая из конечного числа прямолинейных отрезков (*звеньев ломаной*), любые два соседних из которых имеют общий конец. Ломаная *замкнута*, если первое и последнее звено тоже имеют общий конец (и поэтому тоже считаются соседними). Ломаная *несамопересекающаяся*, если ее несоседние звенья не имеют общих точек (не пересекаются). Очевидно, трехзвенная ломаная *несамопересекающаяся* и ограничивает треугольник. Четырехзвенная ломаная уже может самопересекаться. Если она *несамопересекается*, то ограничивает четырехугольник, не обязательно выпуклый. Далее без оговорок рассматриваем только замкнутые *несамопересекающиеся* ломаные. Оговорка о конечной части нужна, потому что эта ломаная ограничивает две непересекающиеся части плоскости — конечную, лежащую внутри ломаной, и бесконечную, лежащую вне ее. В общем случае n -звенная ломаная ограничивает n -угольник. Однако это утверждение не так очевидно, как это кажется на первый взгляд, и является частным случаем знаменитой теоремы Жордана о кривых. Доказательство этого частного случая можно найти в книге [38]. Доказательство общего случая (да и строгая формулировка тоже) более сложны и выходят за рамки доступного школьникам (популярному изложению этой темы уже посвящены целые книги).

Многоугольник (да и вообще любая плоская фигура) может рассматриваться как множество, состоящее из точек плоскости и называется *выпуклым*, если вместе с любыми двумя точками он содержит соединяющий их отрезок. Ломаная, ограничивающая многоугольник, называется его *границей*. Точки границы можно включать в состав многоугольника, тогда его называют *замкну-*

тым. Если же многоугольник рассматривается без граничных точек, то его называют *открытым*, а его точки — *внутренними*. Сам этот открытый многоугольник называют еще *внутренностью* замкнутого многоугольника. Если один из них выпуклый, то будет выпуклым и второй. Вообще для геометрии часто различие между замкнутым и открытым многоугольником несущественно, например понятие *периметра* (длины границы многоугольника) и площади от этого не зависит. Но в некоторых случаях из формальных соображений удобно рассматривать замкнутые многоугольники. Заметим, что понятие площади даже в случае многоугольников не такое простое, как понятие периметра. Например, если мы двумя разными способами триангулируем (разобьем на непересекающиеся по внутренним точкам многоугольники) многоугольник, то почему суммы площадей треугольников разных триангуляций будут равны? Мы не будем углубляться в эти вопросы, только лишь введем обозначение $S(M)$ для площади многоугольника M , и $p(M)$ для его периметра. Будем считать очевидным, что если один многоугольник содержит в себе другой, то площадь первого больше площади второго (свойство монотонности площади). Подобное утверждение для периметров уже неверно для произвольных многоугольников, но остается верным для выпуклых многоугольников.

❶ 13. Докажите свойство монотонности периметров для выпуклых многоугольников и приведите пример невыпуклого многоугольника, вложенного в выпуклый, для которых оно не выполняется.

Указание. Многократно примените неравенство треугольника.

Приведем теперь обещанное второе определение выпуклого многоугольника. Это ограниченная плоская фигура, являющаяся пересечением конечного числа *замкнутых полуплоскостей*. Полуплоскость — это любая из двух частей плоскости, на которые ее разбивает произвольная прямая линия. Если к полуплоскости присоединить эту линию, получается замкнутая полуплоскость. Полуплоскость (и замкнутая и открытая) является

выпуклым множеством. Наглядно этот факт очевиден и проще всего его принять за аксиому.

❖ 14. Докажите, что пересечение выпуклых фигур — выпуклая фигура.

Поэтому данное выше определение задает выпуклую фигуру. Оговорка об ограниченности нужна, так как например пересечение двух полуплоскостей образует *угол*, если их граничные прямые не параллельны (правда, этот угол не может быть *развернутым*), *полосу*, если они параллельны и полуплоскости направлены друг на друга (расстояние между параллельными краями полосы называется ее *шириной*), и будет пустым множеством, если полуплоскости направлены в противоположные стороны. И углы и полосы являются выпуклыми фигурами и они могут быть как открытыми, так и замкнутыми, а в силу неограниченности не имеют ни периметра ни площади.

❖ 15. Какие фигуры могут получиться при пересечении

- двух углов,
- угла и полосы,
- двух полос?

Прямую назовем *опорной* (или *граничной*) для данной фигуры, если фигура лежит в одной из полуплоскостей, ограниченной этой прямой, и хотя бы одна точка фигуры лежит на этой прямой. Указанную полуплоскость также назовем *опорной* (или *граничной*). Оговорка об ограниченности нужна, так как, например, круг является пересечением своих опорных полуплоскостей.

Границей многоугольника является замкнутая ломаная, образованная отрезками, которые являются пересечениями многоугольника с определяющими его полуплоскостями. Концы этих отрезков называются *вершинами* многоугольника, а сами отрезки — его *сторонами*. Равносильность двух определений выпуклого многоугольника кажется очевидной, но строго это доказать не так просто (и доказательство зависит от используемой аксиоматики), поэтому мы не будем углубляться и в этот вопрос.

Отрезки, соединяющие вершины, не лежащие на одной стороне (не соседние), называются *диагоналями*.

❶ 16. Сколько диагоналей у n -угольника?

Некоторые величины, характеризующие форму многоугольников

Наибольшая из диагоналей и сторон n -угольника называется его *диаметром*. Диаметр у многоугольника может быть много. Но их длины все равны, и число, которому они равны также называется диаметром многоугольника.

❶ 17. Диаметр замкнутого многоугольника равен наибольшему расстоянию между его точками.

Например, диаметр треугольника — это наибольшая из его сторон.

Что такое диаметр круга, знают все. Он очевидно совпадает с введенным выше общим понятием диаметра.

❶ 18. У открытого многоугольника наибольшее расстояние между его точками может не существовать (не достигаться). На самом деле, оно всегда не достигается.

Понятие диаметра можно ввести для любой замкнутой ограниченной фигуры Φ и обозначить $d(\Phi)$ (что такое замкнутая фигура в общем случае определять здесь неуместно).

Для таких фигур можно также ввести понятие *ширины*, как наименьшей ширины полосы, содержащей данную фигуру, понятие *вписанного круга*, как *наибольшего круга*, лежащего (помещающегося) в этой фигуре, и понятие *описанного круга*, как *наименьшего круга*, содержащего (накрывающего) ее. Указанные полоса и круги у некоторых фигур могут определяться неоднозначно, но для любой данной фигуры Φ ее ширина и *радиусы вписанного и описанного кругов* (*внутренний и внешний радиусы*) конечно определены однозначно и далее обозначаются $b(\Phi)$, $r(\Phi)$, $R(\Phi)$. Иногда внешний радиус называют радиусом Юнга, а внутренний радиус — радиусом Бляшке. Существование

введенных понятий для произвольной фигуры не очевидно, однако для многоугольников (не обязательно выпуклых) можно доказать и более точные утверждения (для выпуклых это полнее).

Высотой, опущенной на сторону многоугольника, называется самый длинный перпендикуляр, опущенный на ее или ее продолжение из вершин многоугольника (или любой из них, если их несколько). В случае треугольника это понятие совпадает со всем известным понятием высоты треугольника.

19. Ширина многоугольника равна наименьшей из его высот. Диаметр всегда больше ширины.

Поэтому ширина треугольника равна наименьшей из его высот.

Наименьшую выпуклую фигуру, содержащую данную невыпуклую фигуру, назовем *выпуклой оболочкой*.

20. При нечетном n для правильного n -угольника справедливы равенства

$$2nb \operatorname{tg} \frac{\pi}{2n} = p = 2nD \sin \frac{\pi}{2n}, \quad S = \frac{n}{2} D^2 \cos \frac{\pi}{n} \operatorname{tg} \frac{\pi}{2n}.$$

21. Докажите, что при замене произвольной невыпуклой фигуры ее выпуклой оболочкой диаметр, ширина и внешний радиус не меняются, периметр уменьшается, площадь увеличивается, внутренний радиус не уменьшается.

22. Докажите, что полоса, края которой проходят через концы данного диаметра выпуклой фигуры перпендикулярно ему, содержит эту фигуру внутри себя.

Следующие неравенства почти очевидны.

23. Докажите, что для любых выпуклых фигур

$$d(M) \leq 2R(M).$$

Равенство возможно лишь когда некоторый диаметр внешней окружности является диаметром множества M .

24. Докажите, что для любых выпуклых фигур $2r(M) \leq b(M)$. Равенство возможно лишь когда концы некоторого диаметра внутренней окружности принадлежат границе множества M .

25. Докажите, что для центрально-симметричных выпуклых многоугольников (и любых центрально-симметричных выпуклых фигур)

$$d(M) = 2R(M), \quad b(M) = 2r(M).$$

26. Описанный круг данного многоугольника либо имеет диаметр, совпадающий с диаметром многоугольника M , и тогда $R(M) = d(M)/2$, либо он описан вокруг остроугольного треугольника с вершинами, являющимися вершинами многоугольника M .

Указание. Если круг не содержит диаметра, то выберем на нем максимальную дугу, не содержащую вершин из M . Симметричная ей дуга должна содержать хотя бы одну вершину из M (иначе ее можно увеличить до большей «пустой» дуги, чем рассматриваемая), которая вместе с концами максимальную дуги образует нужный треугольник.

Обратим внимание на то, что в случае треугольника внешний радиус совпадает со школьным понятием радиуса описанного вокруг треугольника круга только в случае остроугольного или прямоугольного треугольников. Для тупоугольного треугольника внешний радиус равен половине диаметра и меньше радиуса описанного вокруг треугольника круга.

27. Вписанный круг данного многоугольника либо касается параллельных сторон многоугольника (причем ближайших друг к другу, если есть другие пары параллельных сторон), и тогда

$$r(M) = b(M)/2,$$

либо касается трех сторон многоугольника.

В случае треугольника внутренний радиус поэтому совпадает со школьным понятием радиуса вписанного в треугольник круга.

В школе определяется также понятие вписанного в произвольный многоугольник круга, как круга, касающегося всех сторон данного многоугольника (который при этом будет обязательно выпуклым).

☉ 28. Если в многоугольник M можно вписать круг в школьном смысле, то его радиус совпадает с внутренним радиусом $r(M)$ (и сам он является единственным вписанным кругом в обобщенном смысле), причем

$$p(M)r(M) = 2S(M).$$

Вообще, если круг радиуса r касается или пересекает все стороны многоугольника M , то

$$p(M)r \geq 2S(M).$$

☉ 29. Для произвольного выпуклого многоугольника M докажите, что $p(M)r(M) \leq 2S(M)$, причем равенство возможно лишь когда многоугольник M — описанный вокруг некоторого круга.

Следующая задача предлагалась в 1966 году на Всероссийской олимпиаде.

☉ 30. (ВМО, 66) Для произвольного выпуклого многоугольника M докажите, что $p(M)r(M) > S(M)$.

Указание. К каждой стороне многоугольника M приложите прямоугольник с основанием, равным ей, и высотой $r(M)$. Так как они пересекаются, то площадь покрытой ими фигуры будет меньше суммы их площадей, т.е. $p(M)r(M)$. С другой стороны, очевидно, что весь M покрыт этими прямоугольниками, в противном случае круг с центром в непокрытой точке и радиусом, большим $r(M)$, целиком лежит в M , что противоречит определению $r(M)$.

Используя задачи 29, 30, решите следующую задачу.

☉ 31. (Москва, 81) Если выпуклый многоугольник M содержится в выпуклом многоугольнике N , то

$$s(M)/p(M) < 2S(N)/p(N).$$

Указание: $s(M)/p(M) < r(M) \leq r(N) \leq 2S(N)/p(N)$.

Эта задача имеет естественное обобщение и на пространственный случай, только неравенство будет иметь вид $v(M)/s(M) < 3v(N)/s(N)$, где v обозначает объем, а s — площадь поверхности многогранника. Для ее решения надо соответствующим образом перенести в пространство задачи 29, 30.

☞ 32. Докажите, что для медиана меньше полусуммы окружающих ее сторон.

☞ 33. Докажите, что для выпуклых многоугольников (и любых выпуклых фигур, для которых можно ввести понятие периметра)

$$p(M) > 4R(M), \quad p(M) \geq 2d(M).$$

Указание. На границе фигуры выберем две точки, делящие периметр пополам, и рассмотрим окружность, в которой эти точки являются диаметром. Тогда для любой точки на границе фигуры сумма расстояний до концов этого диаметра не больше $p/2$, поэтому согласно задаче 32 расстояние от нее до центра рассматриваемой окружности меньше $p/4$, поэтому круг радиуса меньше $p/4$ покрывает фигуру, значит $R < p/4$.

1.3 Неравенства для треугольников

Здесь мы предлагаем читателю несколько задач о неравенствах для произвольных треугольников, которые далее будут обобщены для произвольных выпуклых многоугольников. При этом используем обозначения иногда в несколько ином смысле, чем в предыдущем разделе, а именно, как и в школе обозначаем R радиус описанного круга, p — полупериметр. Как и в предыдущем разделе d — диаметр, т.е. длиннейшая сторона, b — ширина, т.е. кратчайшая высота.

Начинаем с нескольких задач для треугольников специального вида.

Неравенства для прямоугольных и остроугольных треугольников

☉ 34. Высота прямоугольного треугольника, опущенная на гипотенузу, не больше половины гипотенузы.

☉ 35. Сумма катетов не больше гипотенузы, умноженной на $\sqrt{2}$.

☉ 36. Докажите для прямоугольного треугольника неравенства

$$R \geq \sqrt{S}, \quad r + 2R \geq \sqrt{2S}.$$

☉ 37. Докажите неравенство $r \leq c/(2 + \sqrt{8})$, где c — гипотенуза.

☉ 38. Докажите неравенство $r/h \geq 1/(1 + \sqrt{2})$, где h — высота, опущенная на гипотенузу.

☉ 39. Докажите, что для остроугольного треугольника

$$R \leq \frac{d}{4\sqrt{3}}.$$

☉ 40. Докажите, что для остроугольного треугольника $p > 2R$.

☉ 41. (Москва, 1992) Биссектриса прямого угла не превосходит по длине половину проекции гипотенузы на прямую, перпендикулярную биссектрисе.

Экстремальные свойства равнобедренных треугольников

Задачи этого цикла, интересные и сами по себе, будут часто использоваться в следующих разделах.

☉ 42. Докажите, что среди всех треугольников с данным $\angle A$, a наибольший периметр и площадь имеет равнобедренный.

43. Из двух неравных треугольников с общим основанием и равными углами при вершине большую площадь и периметр имеет тот, у которого разность углов при основании меньше, или, что равносильно, разность боковых сторон меньше.

44. Докажите, что среди всех треугольников с данным углом $\angle A$ и данной площадью наибольшую высоту h_a , наименьшую сторону a и наименьший периметр имеет равнобедренный.

45. Из двух неравных треугольников с общим основанием и равными периметрами большую площадь имеет тот, у которого разность углов при основании меньше, или, что равносильно, разность боковых сторон меньше.

46. Докажите, что среди всех треугольников с данным основанием и равными периметрами наибольшую площадь имеет равнобедренный.

Указание. См. задачу 49.

47. Докажите, что среди всех треугольников с данными a, h_a высотой наименьший периметр и наименьший радиус минимального объемлющего круга имеет равнобедренный.

48*. Докажите, что среди всех треугольников с данными $\angle A, h_a$ наименьшую площадь и наименьший периметр имеет равнобедренный.

49*. Докажите, что среди всех треугольников с данным основанием и вершиной, лежащей на данной прямой, не проходящей через основание, наименьший периметр имеет треугольник, у которого биссектриса при вершине перпендикулярна данной прямой. Как найти с помощью циркуля и линейки среди указанных треугольников тот, который имеет наименьший угол при вершине?

☉ 50*. Докажите, что среди всех треугольников с данными a, m_a наибольший периметр и наибольшую площадь имеет равнобедренный.

☉ 51. Среди всех треугольников, у которых даны $\angle A, a$, равнобедренный имеет наименьшую медиану m_a , если $\angle A$ тупой, и наибольшую медиану, если он острый. В случае прямого угла медиана $m_a = a/2$.

☉ 52*. Среди всех треугольников, у которых даны $\angle A, m_a$, найти имеющие наименьшую площадь и наименьший периметр.

☉ 53. Среди всех треугольников, у которых даны $\angle A, a$, равнобедренный имеет наибольшую биссектрису l_a .

☉ 54. Среди всех треугольников, у которых даны $\angle A, l_a$, равнобедренный имеет наименьшую сторону a .

☉ 55**. Среди всех треугольников, у которых даны a, l_a найти имеющие наименьшую площадь и наименьший периметр.

Угол и точка внутри него

Две задачи на этот сюжет уже были в разделе 1.1.

☉ 56. Докажите, что среди всех треугольников, отсекаемых от данного угла прямой, проходящей через данную точку, лежащую на биссектрисе, наименьшую площадь имеет равнобедренный треугольник.

☉ 57*. Докажите, что среди всех треугольников, отсекаемых от данного угла прямой, проходящей через данную точку, лежащую на биссектрисе, наименьший периметр и наименьшую сторону противоположную данному углу, имеет равнобедренный треугольник.

☉ 58*. С помощью циркуля и линейки отсекаете от данного угла прямой, проходящей через данную точку, треугольник данного периметра.

☉ 59*. С помощью циркуля и линейки отсекаете от данного угла прямой, проходящей через данную точку внутри угла, треугольник минимального периметра.

☉ 60**. Докажите, что среди всех треугольников, отсекаемых от данного угла с вершиной C прямой, проходящей через данную точку M внутри угла, наименьшую сторону AB имеет треугольник, у которого высота CH опускается в точку H , симметричную M относительно середины AB (т.е. такую, что $AH = BM$).

Любопытно, что в отличие от остальных подобных задач, предыдущая задача не имеет явного геометрического решения, и решается с использованием понятия производной. Вероятно, это связано с тем фактом, что построить указанный в ее формулировке отрезок AB циркулем и линейкой невозможно (см. [74, 56]).

☉ 61. (И.Ф. Шарыгин) В угле с вершиной O даны точки M, N . Провести через N прямую, пересекающую стороны угла в точках A, B , так, чтобы четырехугольник $AOBM$ имел наибольшую площадь.

Экстремальные точки в произвольном треугольнике

В этом цикле в виде задач сформулированы несколько классических теорем геометрии треугольника, решения которых можно найти например в [74, 51, 56, 59, 32, 57].

☉ 62*. (Торричелли) Найдите в треугольнике точку, сумма расстояний от которой до вершин минимальна.

Указание. Если в треугольнике все углы меньше 120 градусов, то искомая точка (точка Ферма-Торричелли) — это точка, из которой все стороны треугольника видны под равными углами. Действительно, соединим ее отрезками с вершинами треуголь-

ника и проведем через них прямые, перпендикулярные этим отрезкам. Получится правильный треугольник (высота которого равна сумме длин этих отрезков). Для любой точки этого треугольника сумма расстояний до его сторон постоянна и равна его высоте. Так как проекция короче наклонной, то для любой точки, отличной от точки Торричелли, сумма расстояний от нее до вершин данного треугольника больше суммы расстояний до сторон построенного правильного треугольника. Если один из углов не меньше 120° , то искомая точка совпадает с вершиной этого угла. Подробности см., например, в [38].

Другое, в чем-то более простое доказательство, можно найти в [59]. См. также [3], задача 363, а также [74, 51].

❖ **63*.** (Лейбниц) Найдите в треугольнике точку, сумма квадратов расстояний от которой до вершин минимальна.

Указание. Эта точка — центр тяжести треугольника, который совпадает с точкой пересечения медиан. Решение можно найти в [3, 74, 51].

❖ **64*.** (IMO, 1981) Найти внутри треугольника со сторонами a, b, c точку, для которой $a/x + b/y + c/z$, где x, y, z ее расстояния соответственно до сторон a, b, c минимально.

Указание. Эта точка — центр вписанного круга. Решение с помощью принципа Лагранжа см. в [65]. Другое решение и обобщение см. в разделе 2.2.

❖ **65.** (Люилье) Найдите точку, сумма квадратов расстояний которой до сторон треугольника минимальна.

Указание. Это точка, расстояния от которой до сторон пропорциональны сторонам. Ее называют иногда точкой Лемуана, хотя можно назвать точкой Лемуана-Люилье. Далее см. указание к задаче 253. Решение можно найти в [3], задачи 197, 365, а также в [74, 51].

Симедианой называется прямая, симметричная медиане относительно биссектрисы.

❖ 66. Симедиана делит основание треугольника пропорционально квадратам боковых сторон. Симедиана есть геометрическое место точек, расстояния от которых до боковых сторон пропорциональны их длинам.

Указание. Проведем медиану к стороне c . Она разбивает его на два треугольника равной площади, а угол при вершине на углы γ_1, γ_2 , такие, что $\sin \gamma_1 / \sin \gamma_2 = b/a$ (согласно задаче 104). Симедиана разбивает треугольник на два треугольника с углами при общей вершине γ_2, γ_1 , поэтому согласно задаче 104 отношение их площадей равно a^2/b^2 . Принимая за основания этих треугольников стороны a, b получаем, что их высоты, опущенные из конца симедианы на эти стороны, относятся как a/b . Подробности см. в [3], задача 365, а также [51].

❖ 67. Докажите, что точка Лемуана совпадает с точкой пересечения симедиан¹.

Указание. Согласно задаче 66 точка, расстояния которой до сторон a, b, c равны $d_a = ka, d_b = kb, d_c = kc$, лежит на геометрическом месте точек, расстояния от которых до стороны a, b пропорциональны этим сторонам, т.е. на симедиане, проведенной к c . Аналогично, она лежит и на двух остальных симедианах. Подробности см. в [3], задача 365, а также в [51].

❖ 68*. Дан угол и точка внутри него. Найдите треугольник минимального периметра с вершиной в данной точке и вершинами на сторонах данного угла.

Указание. Разверните стороны треугольника в ломаную линию с фиксированными концами, отразив симметрично данную точку относительно сторон данного угла.

❖ 69*. (Фаньяно) Впишите в остроугольный треугольник треугольник минимального периметра.

Указание. Минимальным является ортоцентрический треугольник, образованный основаниями высот данного треугольни-

¹Используя специальную терминологию, это утверждение можно сформулировать так: точка Лемуана изогональна точке пересечения медиан.

ка. У ортоцентрического треугольника указанные высоты данного треугольника совпадают с биссектрисами ортоцентрического треугольника («двойственность высот и биссектрис»). Примените предыдущую задачу и получите доказательство, найденное известным венгерским математиком Л. Фейером в его студенческие годы (см. [59], где приведено также еще два доказательства теоремы Фаньяно, а также [3], задача 362). Сам Фаньяно доказал эту теорему в 1775 г. с помощью громоздких вычислений).

Ортоцентрический треугольник можно рассматривать как путь шара в треугольном бильярде (или траекторию луча света в треугольном калейдоскопе). Эта путь является периодическим, так как шар будет по нему двигаться бесконечно долго. Вопрос о других возможных (периодических и непериодических) траекториях в многоугольных бильярдах служит предметом активных современных исследований (см., например [67]).

Следующие три задачи взяты из [57]. Ответом в последних двух из них является подходящий *педальный треугольник*. Так называется треугольник, образованный основаниями перпендикуляров, опущенных из одной точки на стороны данного треугольника.

❖70. Пусть $A'B'C'$ вписан в треугольник ABC (A' лежит на BC и т.д.). Докажите, что а) окружности, описанные вокруг $AB'C'$, $BA'C'$, $CA'B'$ пересекаются в одной точке б) педальный треугольник $A''B''C''$, определенный точкой M , подобен треугольнику $A'B'C'$ и меньше его.

Указание. Треугольник $A''B''C''$ переходит в $A'B'C'$ при гомотетии и повороте на угол $\angle B''MB' = \angle C''MC' = \angle A''MA'$.

❖71*. Впишите в данный треугольник треугольник, у которого минимальна сумма квадратов сторон (эта задача имеется в [3], с. 295., на с.296 сформулировано ее обобщение).

Указание. Минимальным будет педальный треугольник, у которого медианы совпадают с перпендикулярами, основания которых его образуют (в задаче Торричелли совпадали с перпендикулярами биссектрисы педального треугольника). Воспользуй-

тесь тем, что геометрическое место точек, для которых сумма квадратов расстояний до концов данного отрезка есть окружность с центром в его середине. Точка, определяющая указанный педальный треугольник, совпадает с точкой пересечения симедиан данного треугольника. Расстояния от этой точки (точки Лемуана-Люилье) до сторон данного треугольника пропорциональны этим сторонам. Из всех точек плоскости минимальная сумма квадратов расстояний до сторон данного треугольника достигается в точке Лемуана-Люилье (задача 65). Сумма квадратов сторон треугольника вдвое больше суммы квадратов расстояний от центра треугольника до его вершин. Подробности см. [3], задача 366.

72. Если из точки Лемуана-Люилье опустить перпендикуляры на стороны треугольника, она совпадет с точкой пересечения медиан этого педального треугольника (эта задача тоже есть в [3]).

Указание. Возьмем в педальном треугольнике любую точку, тогда сумма квадратов расстояний от нее до сторон исходного треугольника не меньше, чем у точки Лемуана (задача 65), и не больше, чем сумма квадратов расстояний до вершин педального треугольника, т.е. точка Лемуана имеет минимальную сумму расстояний до его вершин, значит согласно задаче 63 она совпадает с точкой пересечения его медиан. Подробности см. [3], задачи 365 п.3 и 366.

73*. (А.Заславский) Впишите в данный треугольник треугольник, у которого минимален диаметр.

Указание. Минимальным будет правильный педальный треугольник. Точка, определяющая этот треугольник, удалена от сторон треугольника на расстояния, обратно пропорциональные этим сторонам и лежит на пересечении трех окружностей Аполлония данного треугольника (поэтому в [57] она названа точкой Аполлония). Подробное решение можно найти в [6, 57].

1.4 Экстремальные свойства правильного треугольника

В этом цикле задач в виде неравенств сформулированы различные экстремальные свойства правильного треугольника. Далее в разделах 1.5, 1.9, 2.1 все эти свойства, а также некоторые другие, будут доказаны, а некоторые и обобщены на случай многоугольников. Но приведенные далее задачи более просты, и незнакомому с ними читателю рекомендуется попробовать решить эти задачи самостоятельно. Начинаем с простейшей задачи такого типа.

❖ 74. Докажите, что угол против наибольшей стороны треугольника не меньше 60° , а угол против наименьшей стороны не больше 60° . Равенство возможно лишь для правильного треугольника.

Далее в подобных задачах с целью краткости предложение «равенство возможно лишь для правильного треугольника», как правило, будем опускать.

Некоторые из следующих далее задач будут обобщены на произвольные выпуклые многоугольники. Но для треугольников они решаются легче, и читателю рекомендуется попробовать решить их сейчас.

❖ 75. Докажите, что $2r \leq R$. Укажите треугольники, для которых r/R сколь угодно близко к 0.

Указание. Окружность проходящая через середины сторон треугольника имеет радиус $R/2$ и пересекает (или касается) каждую сторону. Случай одновременного касания возможен лишь для правильного треугольника и тогда $R/2 = r$. В остальных случаях $R/2 > r$.

Это короткое решение принадлежит венгерскому математику Адаму.

Уточнением неравенства $2r \leq R$ служит теорема Эйлера-Чаплы:

76*. Докажите, что расстояние между центрами вписанной и описанной окружностей треугольника вычисляется по формуле $\sqrt{R(R-2r)}$. Докажите, что если расстояние между центрами окружностей радиусов R, r равно $\rho = \sqrt{R(R-2r)}$, то для каждой точки большей окружности найдется вписанный в нее и описанный вокруг меньшей окружности треугольник с вершиной в этой точке.

В следующей задаче, принадлежащей английскому математику Юнгу, равенство достигается не только для правильного треугольника. Все подобные случаи будем оговаривать отдельно.

77. Докажите, что $R \leq d/\sqrt{3}$, где под R понимается радиус наименьшего круга, накрывающего треугольник. Укажите треугольники, для которых r/d сколь угодно близко к 0. Укажите тупоугольные треугольники, для которых d/R сколь угодно близко к 0, где R — радиус описанного круга.

Указание. Диаметр — это наибольшая сторона, а угол против нее не больше 60° . Следовательно она видна из центра описанного круга под углом не больше 120° .

Следующая задача принадлежит немецкому математику Бляшке.

78. Докажите, что $b/3 \leq r < b/2$. Равенство возможно лишь для правильного треугольника.

79. (IMO, 1961) Докажите неравенство

$$S \leq \frac{p^2}{3\sqrt{3}} \leq \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4\sqrt{3}}.$$

Другая формулировка той же задачи: среди всех треугольников данного периметра наибольшую площадь имеет правильный и среди всех треугольников с данной суммой квадратов сторон наибольшую площадь имеет правильный.

Указание. На олимпиаде предлагалось доказать неравенство $S \leq \frac{a^2+b^2+c^2}{4\sqrt{3}}$. Оно очевидно следует из неравенств

$$S \leq \frac{p^2}{3\sqrt{3}}, (a+b+c)^2 \leq 3(a^2+b^2+c^2).$$

(см. задачу 87).

80. Докажите, что среди всех треугольников данной площади наименьший периметр и наименьшую сумму квадратов сторон имеет правильный.

Указание. Применить задачу 79. Но можно и наоборот, вывести из этой задачи задачу 79.

81. Докажите, что $3\sqrt{3}r \leq p \leq 3\sqrt{3}R/2$. Другая формулировка той же задачи: среди всех треугольников вписанных в данный круг наибольший периметр имеет правильный, а среди всех треугольников описанных вокруг данного круга наименьший периметр имеет правильный.

Указание. Нижняя оценка следует из нижней оценки задачи 82 и 79.

82. Докажите, что $3\sqrt{3}r^2 \leq S \leq 3\sqrt{3}R^2/4$. Другая формулировка той же задачи: среди всех треугольников вписанных в данный круг наибольшую площадь имеет правильный, а среди всех треугольников описанных вокруг данного круга наименьшую площадь имеет правильный.

Указание. Верхняя оценка следует из верхней оценки задачи 81 и 79.

Первое из следующих неравенств предлагалось в 1984 г. на Московской олимпиаде.

83. Докажите, что $\sqrt{3}b \leq p \leq 3d/2$. Укажите треугольники, для которых b/p и b/d сколь угодно близко к 0.

Указание. Нижняя оценка следует из нижней оценки задачи 84 и 79.

84. Докажите, что $b^2/\sqrt{3} \leq S \leq \sqrt{3}d^2/4$.

Указание. Верхняя оценка следует из верхней оценки задачи 83 и 79.

1.5 Доказательство теоремы об экстремальных свойствах правильного треугольника

Некоторые из этих неравенств можно уточнить, если ввести рассмотрение стороны треугольника a, b, c , опущенные на них высоты h_a, h_b, h_c , и проведенные к ним биссектрисы l_a, l_b, l_c и медианы m_a, m_b, m_c . Противолежащие этим сторонам углы обозначаем $\alpha = \angle A, \beta = \angle B, \gamma = \angle C$. Кратчайшую биссектрису обозначим l , а длиннейшую — L . Аналогичные обозначения введем для высот h, H и медиан m, M . Очевидно $h = b$ в прежних обозначениях.

Мы приведем некоторые из этих уточнений, хотя они и не имеют обобщений на произвольные многоугольники.

Теорема 1. *Для произвольного треугольника справедливы неравенства*

$$\begin{aligned} \frac{h^2}{\sqrt{3}} &\leq 3\sqrt{3}r^2 \leq \frac{\sqrt[3]{(h_a h_b h_c)^2}}{\sqrt{3}} \leq S \leq \\ &\leq \frac{2(ab + ac + bc) - a^2 - b^2 - c^2}{4\sqrt{3}} \leq \frac{\sqrt{3}}{4} \sqrt[3]{(abc)^2} \leq \\ &\leq \frac{p^2}{3\sqrt{3}} \leq \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4\sqrt{3}} \leq \frac{3\sqrt{3}}{4} R^2 \leq \frac{\sqrt{3}}{4} d^2. \end{aligned}$$

Каждое из неравенств обращается в равенство только для правильного треугольника.

Неравенство

$$S \leq \frac{2(ab + ac + bc) - a^2 - b^2 - c^2}{4\sqrt{3}}$$

принадлежит швейцарским математикам Хадвигеру и Финслеру.

Для доказательств понадобятся некоторые тождества и неравенства, непосредственно не связанные с темой книжки, но интересные сами по себе.

85. Докажите равенство

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}.$$

и выведите из него неравенство $h \leq 3r$.

Применяем алгебру

Доказательства следующих алгебраических неравенств можно найти во многих книгах, например в [7, 8, 63, 54, 75].

86. Докажите тождество

$$x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz = ((x - y)^2 + (x - z)^2 + (y - z)^2)/2$$

и выведите из него неравенства

$$xy + xz + yz \leq x^2 + y^2 + z^2, \quad 3(xy + xz + yz) \leq (x + y + z)^2.$$

87. Из предыдущего неравенства выведите

$$(x + y + z)^2 \leq 3(x^2 + y^2 + z^2)$$

(частный случай неравенства между средним арифметическим и средним квадратичным) и

$$3xyz(x + y + z) \leq (xy + xz + yz)^2$$

(частный случай неравенств Мюрхеда).

88*. Докажите общее неравенство между средним арифметическим и средним квадратичным

$$(x_1 + \dots + x_n)^2 \leq n(x_1^2 + \dots + x_n^2)$$

Указание:

$$n(x_1^2 + \dots + x_n^2) - (x_1 + \dots + x_n)^2 = \sum_{1 \leq i < j \leq n} (x_i - x_j)^2.$$

89. Докажите тождество

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x + y + z)((x - y)^2 + (x - z)^2 + (y - z)^2)/2$$

и выведите из него частный случай неравенства между средним арифметическим и средним геометрическим: для неотрицательных x, y, z

$$3xyz \leq x^3 + y^3 + z^3.$$

Более привычная форма записи этого неравенства

$$\sqrt[3]{xyz} \leq \frac{x + y + z}{3}.$$

90. Выведите из неравенства между средним геометрическим и средним арифметическим неравенство между средним геометрическим и средним гармоническим положительных чисел x, y, z

$$\frac{27}{\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right)^3} \leq xyz,$$

или, что равносильно

$$\frac{3}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}} \leq \sqrt[3]{xyz}$$

91. Убедитесь, что все предыдущие неравенства обращаются в равенства только при $x = y = z$.

Из утверждений предыдущих задач вытекает следующая

Теорема 2. Для положительных x, y, z

$$\frac{3}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}} \leq \sqrt[3]{xyz} \leq \sqrt{\frac{xy + xz + yz}{3}} \leq \\ \leq \frac{x + y + z}{3} \leq \sqrt{\frac{x^2 + y^2 + z^2}{3}}$$

Ее неравенства являются частным случаем неравенств Ньютона-Маклорена (см., например, [7]), которые в полном виде нам не понадобятся. Далее в разделе 2.20, теорема 61, будет приведена геометрическая интерпретация этих неравенств.

92. Выведите из неравенства между средним геометрическим и средним арифметическим неравенство

$$\frac{\sqrt{3}}{4} \sqrt[3]{(abc)^2} \leq \frac{p^2}{3\sqrt{3}}.$$

Неравенства для углов

93. Если $\alpha, \beta, \gamma > 0$, $\alpha + \beta + \gamma = 2\pi$, то

$$\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma \geq -3/2.$$

Указание. Рассмотрим единичные вектора с общим началом с углами α, β, γ между ними и возведем их сумму скалярно в квадрат. Так как скалярный квадрат любого вектора неотрицателен, то, раскрывая скобки и используя свойства скалярного произведения, имеем

$$3 + 2(\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma) \geq 0.$$

Следующая задача дополняет предыдущую, но нам далее не понадобится.

94*. Если α, β, γ — углы треугольника, то

$$3r/R \leq \cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma \leq 3/2,$$

$$\cos \alpha \cos \beta \cos \gamma \leq 1/8,$$

$$2 < \cos(\alpha/2) + \cos(\beta/2) + \cos(\gamma/2) \leq 3\sqrt{3}/2,$$

$$\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta + \operatorname{ctg} \gamma \geq \sqrt{3},$$

$$\sqrt{3} \leq \operatorname{tg}(\alpha/2) + \operatorname{tg}(\beta/2) + \operatorname{tg}(\gamma/2),$$

$$\operatorname{ctg} \alpha/2 + \operatorname{ctg} \beta/2 + \operatorname{ctg} \gamma/2 \geq 3\sqrt{3},$$

для остроугольных треугольников

$$1/2 < \cos(\alpha/2) \cos(\beta/2) \cos(\gamma/2) \leq 3\sqrt{3}/8,$$

$$0 < \operatorname{tg}(\alpha/2) \operatorname{tg}(\beta/2) \operatorname{tg}(\gamma/2) \leq \sqrt{3}/9,$$

$$3\sqrt{3} \leq \operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma,$$

для тупоугольных треугольников

$$0 < \cos(\alpha/2) \cos(\beta/2) \cos(\gamma/2) \leq (1 + \sqrt{2})/4.$$

Решение можно найти в [43].

95. Докажите, что

$$4p^2 = (a + b + c)^2 \leq 3(a^2 + b^2 + c^2) \leq 27R^2.$$

Указание. Обозначая α, β, γ углы, под которыми видны из центра описанной окружности стороны a, b, c , и применяя теорему косинусов и неравенство

$$\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma \geq -3/2,$$

имеем

$$a^2 + b^2 + c^2 = 2R^2(3 - \cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma) \leq 9R^2,$$

откуда

$$4p^2 = (a + b + c)^2 \leq 3(a^2 + b^2 + c^2) \leq 27R^2.$$

96. Докажите, что $a^2 + b^2 + c^2 < 2p^2$, а для тупоугольного треугольника $a^2 + b^2 + c^2 < 3p^2/2$, и проверьте, что эти неравенства точные.

97. Если α, β, γ лежат в пределах от $-\pi$ до π и $\alpha + \beta + \gamma = \pi$, то

$$\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma \leq 3\sqrt{3}/2.$$

Указание. Если один из углов отрицателен, то два другие положительны и неравенство очевидно, так как $3\sqrt{3}/2 > 2$. Считая α, β, γ углами треугольника, рассмотрим другой треугольник, у которого стороны видны из центра описанного вокруг него круга с единичным радиусом под углами $2\alpha, 2\beta, 2\gamma$ (если сумма двух из них меньше π то вместо третьего угла берем сумму остальных двух), тогда его полупериметр равен $\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma$, и остается применить неравенство $p \leq 3\sqrt{3}/2$.

98*. Если α, β, γ углы треугольника, то для остроугольных треугольников

$$2 < \sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma \leq 3\sqrt{3}/2,$$

$$2 < \sqrt{\sin \alpha} + \sqrt{\sin \beta} + \sqrt{\sin \gamma} \leq 3\sqrt[4]{3/4},$$

$$\sqrt{2} < \sin \alpha/2 + \sin \beta/2 + \sin \gamma/2 \leq 3/2,$$

а для тупоугольных треугольников

$$0 < \sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma \leq 1 + \sqrt{2}.$$

$$0 < \sqrt{\sin \alpha} + \sqrt{\sin \beta} + \sqrt{\sin \gamma} \leq 1 + \sqrt[4]{8}.$$

99. Если $\alpha + \beta + \gamma = \pi$, то

$$4 \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma = \sin(\alpha + \beta - \gamma) + \sin(\alpha - \beta + \gamma) + \sin(\beta + \gamma - \alpha).$$

Указание. Заменяя $2 \sin \alpha \sin \beta$ на $\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)$, в формуле

$$(\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)) \sin \gamma$$

два раза выполняя преобразование произведения $2 \cos \phi \sin \gamma$, в сумму $\sin(\phi + \gamma) - \sin(\phi - \gamma)$, и учитывая, что $\sin(\alpha + \beta + \gamma) = 0$, имеем

$$4 \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma = \sin(\alpha + \beta - \gamma) + \sin(\alpha - \beta + \gamma) + \sin(\beta + \gamma - \alpha).$$

100. Если α, β, γ — углы треугольника, то

$$\sin \alpha \sin \beta \sin \gamma \leq 3\sqrt{3}/8.$$

Указание. Примените две предыдущие задачи.

101. Во всех предыдущих неравенствах равенство возможно лишь при $\alpha = \beta = \gamma$.

102*. Если α, β, γ — углы тупоугольного треугольника, то

$$\sin \alpha \sin \beta \sin \gamma \leq 1/2.$$

103*. Если α, β, γ — углы остроугольного треугольника, то

$$0 < \sin(\alpha/2) \sin(\beta/2) \sin(\gamma/2) \leq 1/8.$$

Решения можно найти в [43].

Применяем тригонометрию

104. Докажите, что площадь треугольника со сторонами a, b и углом α между ними равна $\frac{1}{2}ab \sin \alpha$.

105. Докажите неравенство

$$S \leq \frac{\sqrt{3}}{4} \sqrt[3]{(abc)^2}.$$

Указание. Перемножив равенства $2S = ab \sin \gamma$, $2S = bc \sin \alpha$, $2S = ac \sin \beta$, и применив предыдущее неравенство, имеем

$$8S^3 = (abc)^2 \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma \leq 3(abc)^2 \sqrt{3}/8.$$

106. Докажите равенство

$$S = \frac{abc}{4R}$$

и неравенства

$$\sqrt[3]{abc} \leq \sqrt{3}R, \quad S \leq \frac{3\sqrt{3}}{4}R^2$$

Указание. Примените равенства $2S = ab \sin \gamma$, $= 2R \sin \gamma$ и предыдущую задачу.

107. Во всех предыдущих неравенствах равенство возможно лишь при $a = b = c$.

108. Докажите равенство

$$h_a h_b h_c = \frac{8S^3}{abc}.$$

Указание. Перемножьте равенства $2S = ah_a = bh_b = ch_c$.

Доказательство теоремы 1

Неравенство $h \leq 3r$ уже доказано. Неравенство

$$27r^3 \leq h_a h_b h_c$$

следует из соотношения

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}$$

и неравенства между средним геометрическим и средним гармоническим. Выражая площадь S по формуле Архимеда-Герона, подставляя в нее вместо p $(p-a) + (p-b) + (p-c)$ из неравенства

$$3xyz(x+y+z) \leq (xy+xz+yz)^2$$

выводим неравенство

$$4\sqrt{3}S \leq 2(ab+ac+bc) - a^2 - b^2 - c^2.$$

Используя формулу Архимеда-Герона можно проверить, что величина

$$2(ab + ac + bc) - a^2 - b^2 - c^2$$

в 16 раз больше квадрата площади треугольника со сторонами $\sqrt{a}$, $\sqrt{b}$, $\sqrt{c}$. (проверьте, что он существует!) Поэтому из доказанного выше неравенства

$$S \leq \frac{\sqrt{3}}{4} \sqrt[3]{(abc)^2}$$

следует неравенство

$$2(ab + ac + bc) - a^2 - b^2 - c^2 \leq 16 \left(\frac{\sqrt{3}}{4} \sqrt[3]{(\sqrt{a}\sqrt{b}\sqrt{c})^2} \right)^2 = 3 \sqrt[3]{(abc)^2}.$$

Из того же неравенства, учитывая, что

$$h_a h_b h_c = \frac{8S^3}{abc},$$

выводим неравенство

$$\frac{\sqrt[3]{(h_a h_b h_c)^2}}{\sqrt{3}} = \frac{4S^2}{\sqrt{3} \sqrt[3]{(abc)^2}} \leq S.$$

Для доказательства последнего неравенства теоремы применим задачу 26. Все остальные неравенства теоремы уже были доказаны выше.

Применения к алгебре

Следующая задача предложена В.А.Алексеевым (тогда первокурсником, ныне профессором в США).

109. (Москва, 1982) Докажите для любых неотрицательных чисел неравенство

$$a^4 + b^4 + c^4 - 2(a^2b^2 + a^2c^2 + c^2b^2) + abc(a + b + c) \geq 0$$

Указание. Если существует треугольник со сторонами a, b, c , то это неравенство равносильно неравенству $abc \geq 8s^2/p$.

А эту задачу автор этой книги предлагал на студенческую олимпиаду.

❶ 110*. (Студенческая олимпиада мехмата МГУ, 1984) Докажите неравенство

$$a^4 + b^4 + c^4 - 2(a^2b^2 + a^2c^2 + c^2b^2) + 3\sqrt[3]{(abc)^4} \geq 0.$$

Указание. Можно считать, что $a, b, c \geq 0$. Если не существует треугольника со сторонами a, b, c , то

$$a^4 + b^4 + c^4 - 2(a^2b^2 + a^2c^2 + c^2b^2) \geq 0.$$

В противном случае примените неравенство теоремы 1.

Неравенства с медианами

Напомним, что *медиана* — это отрезок прямой от вершины треугольника до середины противоположной стороны и одновременно его длина.

❶ 111. Сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов его сторон.

Указание. Спроектировать одну сторону параллелограмма на противоположную и применить теорему Пифагора.

❶ 112. Медианы можно вычислять по следующей формуле

$$m_a = \frac{\sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2}}{2}.$$

Указание. Построить треугольник до параллелограмма, продолжив медиану за сторону на отрезок, равный длине медианы, и применить предыдущую задачу.

❶ 113. Справедливо равенство

$$4(m_a^2 + m_b^2 + m_c^2) = 3(a^2 + b^2 + c^2).$$

Указание. Три формулы из предыдущей задачи возвести в квадрат и сложить.

114. Площадь треугольника, составленного из медиан, равна трем четвертям площади исходного треугольника.

Указание. Через вершину треугольника провести отрезок, равный и параллельный медиане, не выходящей из этой вершины. Треугольник, образованный этим отрезком и выходящей из этой вершины медианой и будет треугольником, составленным из медиан. Его третья сторона делит боковую сторону исходного треугольника в отношении один к трем.

Теорема 3. Для произвольного треугольника справедливы неравенства

$$\begin{aligned} S &\leq \frac{2(m_a m_b + m_a m_c + m_b m_c) - m_a^2 - m_b^2 - m_c^2}{3\sqrt{3}} \\ &\leq \frac{\sqrt[3]{(m_a m_b m_c)^2}}{\sqrt{3}} \leq \frac{(m_a + m_b + m_c)^2}{9\sqrt{3}} \leq \\ &\leq \frac{m_a^2 + m_b^2 + m_c^2}{3\sqrt{3}} = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4\sqrt{3}} \leq \frac{3\sqrt{3}}{4} R^2. \end{aligned}$$

Каждое из неравенств обращается в равенство только для правильного треугольника.

Для доказательства первых двух неравенств составим из медиан треугольник и применим к нему неравенство теоремы 1. Последнее неравенство доказано в теореме 1. Предпоследнее равенство доказано в задаче 113. Остальные неравенства вытекают из неравенств между средними.

115. Укажите треугольники, у которых

- $(m_a m_b m_c)^2 / S$ может быть сколь угодно велико
- $(m_a + m_b + m_c)^2 / S$ может быть сколь угодно велико
- $(m_a^2 + m_b^2 + m_c^2) / S$ может быть сколь угодно велико.

116. Неравенство

$$S \leq \frac{(m_a + m_b + m_c)^2}{9\sqrt{3}}$$

венгерский математик Л.Фейеш-Тот обобщил следующим образом (почему это обобщение?): для любой точки сумма ее расстояний до вершин треугольника не меньше $2\sqrt[3]{3}\sqrt{S}$.

Указание. Можно считать, что эта точка внутри треугольника. Согласно теореме Торичелли (задача 62), минимум суммы расстояний до вершин достигается в точке, из которой стороны видны под углами 120° , или в вершине с углом не меньше 120° . Если обозначить расстояния от этой точки до вершин x, y, z , то в первом случае площадь равна

$$S = \frac{\sqrt{3}}{4}(xy + xz + yz),$$

а во втором случае $xyz = 0$,

$$S \leq \frac{\sqrt{3}}{4}(xy + xz + yz).$$

Остается применить неравенство задачи 86.

Другое доказательство можно получить следующим образом. Отразим точку относительно сторон треугольника и рассмотрим шестиугольник, образованный полученными тремя точками и вершинами треугольника. Его площадь равна $2S$, а полупериметр равен указанной сумме расстояний. Остается применить изопериметрическое неравенство для этого шестиугольника (частный случай теоремы Зенодора, которая появится далее).

Появление биссектрис

Биссектриса — это отрезок прямой, делящей внутренний угол треугольника пополам, от вершины этого угла до противоположной стороны, и одновременно длина этого отрезка.

117. Биссектрисы можно вычислять по следующей формуле

$$l_a = \sqrt{bc - \frac{bca^2}{(b+c)^2}} = \frac{2}{b+c} \sqrt{bcp(p-a)}$$

Указание. Применить теорему о делении биссектрисой противоположной стороны и теорему Пифагора.

118. Справедливы неравенства

$$bc - \frac{a^2}{4} \leq l_a^2 \leq p(p-a).$$

Равенства возможны лишь при $b = c$.

Указание. Применить предыдущую задачу и неравенство

$$4bc \leq (b+c)^2.$$

119. (Штейнер-Лемус) Если в треугольнике две биссектрисы равны, то он равнобедренный. Из двух биссектрис та больше, которая проведена к меньшей стороне.

Указание. Эта задача с трудом решается геометрически, но легко с помощью формулы для длины биссектрисы. Геометрические решения можно найти в [3], задача 361, а также [39, 35].

Теорема 4. Для произвольного треугольника справедливы неравенства

$$\begin{aligned} \frac{h^2}{\sqrt{3}} \leq \frac{l^2}{\sqrt{3}} \leq S \leq \frac{2(ab+ac+bc) - a^2 - b^2 - c^2}{4\sqrt{3}} \leq \\ \leq \frac{l_a^2 + l_b^2 + l_c^2}{3\sqrt{3}} \leq \frac{p^2}{3\sqrt{3}} \leq \frac{m_a^2 + m_b^2 + m_c^2}{3\sqrt{3}} \leq \frac{3\sqrt{3}}{4} R^2. \end{aligned}$$

Каждое из неравенств обращается в равенство только для правильного треугольника.

Доказательство. Складывая неравенства $l_a^2 \leq p(p-a)$, получаем, что

$$l_a^2 + l_b^2 + l_c^2 \leq p(p-a) + p(p-b) + p(p-c) = p^2.$$

Складывая неравенства $bc - \frac{a^2}{4} \leq l_a^2$, и используя неравенство

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + ac + bc,$$

имеем

$$\begin{aligned} l_a^2 + l_b^2 + l_c^2 &\geq ab + ac + bc - \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4} \geq \\ &\geq \frac{3(2(ab + ac + bc) - a^2 - b^2 - c^2)}{4}. \end{aligned}$$

120. Докажите, что площадь четырехугольника равна половине произведения диагоналей на синус угла между ними.

121. Докажите, что

$$\frac{l^2}{\sqrt{3}} \leq S.$$

Решение. Обозначим биссектрисы через AA_1, BB_1, CC_1 . Без ограничения общности считаем, что $c \leq a, c \leq b$. Тогда согласно свойству биссектрис

$$\frac{CA_1}{A_1B} = \frac{b}{c} \geq 1, \frac{CB_1}{B_1A} = \frac{a}{c} \geq 1,$$

и согласно формуле для площади треугольника $2S = ab \sin \gamma$ имеем неравенство для площадей $S_{CA_1B_1} \geq \frac{1}{4}S_{ABC}$, из которого следует, что площадь четырехугольника ABA_1B_1 не больше трех четвертей S_{ABC} . Обозначим O точку пересечения биссектрис AA_1, BB_1 . Согласно теореме о внешнем угле треугольника угол между ними равен $\frac{\pi}{2} + \frac{\gamma}{2}$, где γ — угол при вершине C треугольника ABC , а так как $\gamma \geq \pi/3$, то $\frac{\pi}{2} + \frac{\gamma}{2} \geq \frac{2\pi}{3}$, значит

$$S_{ABA_1B_1} = \frac{1}{2}l_b l_c \sin \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\gamma}{2} \right) \geq \frac{1}{2}l^2 \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}l^2}{4},$$

откуда имеем $S_{ABC} \geq \frac{4}{3}S_{ABA_1B_1} \geq \frac{\sqrt{3}l^2}{3}$.

Второе решение. Рассмотрим равнобедренный треугольник с углом γ при вершине и биссектрисой длины l_c . Так как $\gamma \geq \pi/3$, то его площадь не меньше, чем $l_c^2/\sqrt{3}$. Сравнивая его с данным

треугольником ABC , видим, что у них общий угол и общая точка на противоположной стороне — конец биссектрисы, которая делит пополам основание равнобедренного треугольника. Остается применить задачу 56.

122. Докажите, что

$$\frac{h^2}{\sqrt{3}} \leq \frac{l^2}{\sqrt{3}} \leq S \leq \frac{L^2}{\sqrt{3}} \leq \frac{M^2}{\sqrt{3}}.$$

Указание. Примените задачу 121 и уже доказанное неравенство теоремы 4:

$$S \leq \frac{l_a^2 + l_b^2 + l_c^2}{3\sqrt{3}}.$$

123. Докажите, что

$$\begin{aligned} 3(l_a l_b l_c)^{2/3} &\leq \frac{(l_a + l_b + l_c)^2}{3} \leq l_a^2 + l_b^2 + l_c^2 \leq p^2 \leq \\ &\leq m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 \leq \frac{27}{4} R^2. \end{aligned}$$

Указание. Примените задачи 87, 89 неравенство $l_a^2 + l_b^2 + l_c^2 \leq p^2$ и теорему 3.

Теперь теорему 4 можно считать полностью доказанной.

Некоторое дополнение к задаче 123 дает следующая задача

124. Докажите, что

$$(l_a l_b l_c)^{2/3} \leq (pS)^{2/3} \leq \frac{p^2}{3}.$$

Указание. Перемножая неравенства задачи 117 и используя формулу Архимеда-Герона и теорему 1, имеем

$$l_a^2 l_b^2 l_c^2 \leq p^3 (p-a)(p-b)(p-c) = p^2 S^2 \leq p^6 / 27.$$

125. Докажите, что

$$9r \leq h_a + h_b + h_c \leq l_a + l_b + l_c \leq p\sqrt{3}.$$

Указание. Примените задачи 85, 123 и неравенство теоремы 2.

Дополнением к задаче 125 служит задача

126. Докажите неравенство $p\sqrt{3} \leq r + 4R$.

Решение. Введем обозначения $r_a = S/(p-a)$, $r_b = S/(p-b)$, $r_c = S/(p-c)$ (на самом деле это радиусы *вневписанных* окружностей треугольника со сторонами a, b, c , но этот факт далее не понадобится). Из формулы Архимеда-Герона и задачи 106 выводятся тождества

$$\begin{aligned} r_a r_b + r_a r_c + r_b r_c &= \frac{S^2}{(p-a)(p-b)} + \frac{S^2}{(p-a)(p-c)} + \frac{S^2}{(p-c)(p-b)} = \\ &= p(p-c) + p(p-b) + p(p-a) = p(3p-a-b-c) = p^2, \\ r_a + r_b + r_c - r &= \frac{S}{p-a} + \frac{S}{p-b} + \frac{S}{p-c} - \frac{S}{p} = \\ &= S \left(\frac{2p-a-b}{(p-a)(p-b)} + \frac{c}{p(p-c)} \right) = \\ &= cS \left(\frac{p(p-c) + (p-a)(p-b)}{p(p-a)(p-b)(p-c)} \right) = \\ &= cS \frac{p^2 - pc + p^2 - ap - bp + ab}{S^2} = \frac{c}{S} (2p^2 - p(a+b+c) + ab) = \\ &= \frac{abc}{S} = 4R. \end{aligned}$$

Применяя задачу 86, имеем

$$3p^2 = 3(r_a r_b + r_a r_c + r_b r_c) \leq (r_a + r_b + r_c)^2 = (r + 4R)^2.$$

Как следствие двух предыдущих задач, имеем цепочку неравенств:

$$9r \leq h_a + h_b + h_c \leq l_a + l_b + l_c \leq p\sqrt{3} \leq r + 4R.$$

Дополняет эти неравенства задача

127. Докажите, что

$$9r \leq h_a + h_b + h_c \leq l_a + l_b + l_c \leq m_a + m_b + m_c \leq 9R/2.$$

Указание. Примените задачи 123, 87.

Задачу 127 можно рассматривать как уточнение неравенства Чаппла - Эйлера между радиусами вписанной и описанной окружностей треугольника $2r \leq R$ (см. задачу 75).

128. Докажите, что

$$27r^2 \leq h_a^2 + h_b^2 + h_c^2 \leq l_a^2 + l_b^2 + l_c^2 \leq p^2 \leq m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 \leq 27R^2/4.$$

Указание. Примените задачи 85, 123 и теорему 2.

Из предыдущей задачи также вытекает неравенство Чаппла-Эйлера. И из следующей задачи тоже.

129. Докажите, что

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} \geq \frac{1}{l_a} + \frac{1}{l_b} + \frac{1}{l_c} \geq \frac{1}{m_a} + \frac{1}{m_b} + \frac{1}{m_c} \geq \frac{2}{R}.$$

Указание. Примените задачи 85, 123 и теорему 2.

130. Докажите, что $\sqrt{3}h \leq \sqrt{3}l \leq \sqrt{3}m \leq p \leq 3\sqrt{3}R/2$.

Указание. Свести к случаю равностороннего треугольника (с данной боковой медианой).

131. Докажите, что $p \leq 3\sqrt{3}R/2 \leq \sqrt{3}M$.

Указание. Окружность с центром в точке пересечения медиан и радиусом $2M/3$ покрывает треугольник.

132*. Докажите, что

$$\sqrt{3}h \leq \sqrt{3}l \leq \sqrt{3}m \leq p \leq 3\sqrt{3}R/2 \leq \sqrt{3}M.$$

Равенство справедливо только для правильного треугольника.

Указание. Применить две предыдущие задачи.

1.6 Опять неравенства для треугольников

Несколько контрпримеров и неравенств

Укажите треугольники, у которых.

- H^2/S может быть сколь угодно мало и сколь угодно велико
- L^2/S может быть сколь угодно велико
- M^2/S может быть сколь угодно велико
- m^2/S может быть сколь угодно мало и сколь угодно велико
- $(l_a l_b l_c)^{2/3}/S$ может быть сколь угодно мало.

133. Укажите треугольники, у которых

- p^2/S может быть сколь угодно велико
- $(a^2 + b^2 + c^2)/S$ может быть сколь угодно велико
- $(abc)^{2/3}/S$ может быть сколь угодно велико
- $(h_a^2 + h_b^2 + h_c^2)/S$ может быть сколь угодно велико и сколь угодно мало
- $(h_a + h_b + h_c)^2/S$ может быть сколь угодно велико и сколь угодно мало
- $(h_a h_b h_c)^{2/3}/S$ может быть сколь угодно мало.

134. Докажите неравенство

$$\frac{1}{2Rr} \leq \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}.$$

135. Для любой точки сумма квадратов ее расстояний до вершин треугольника полупериметра p не меньше $4p^2/9$. Неравенство обращается в равенство только для правильного треугольника.

Указание. Применить задачу 63 и теорему 4.

136. Для любой точки сумма ее расстояний до вершин треугольника полупериметра p не меньше p . Покажите, что отношение указанной суммы к p может неограниченно стремиться к единице.

137**. Верно ли, что $p \leq \sqrt{3}L$?

Признаки равнобедренности

138. Докажите, что из двух высот та больше, которая проведена к меньшей стороне. В случае равенства высот треугольник равнобедренный.

139. Докажите, что из двух медиан та больше, которая проведена к меньшей стороне. В случае равенства медиан треугольник равнобедренный.

Указание: спроектировать боковые медианы на основание или применить задачу 112.

140*. Докажите, что из двух биссектрис та больше, которая проведена к меньшей стороне. В случае равенства биссектрис треугольник равнобедренный.

Указание. Биссектрисы можно вычислить по формулам

$$l_b = \frac{2ac}{a+c} \cos \beta/2, l_c = \frac{2ab}{a+b} \cos \gamma/2.$$

Если $b > c$, то $\beta > \gamma$, $\cos \beta/2 < \cos \gamma/2$,

$$c/(a+c) = 1 - a/(a+c) < 1 - a/(a+b) = b/(a+b),$$

значит, перемножая неравенства, имеем $l_b < l_c$.

Другое решение см. в [3], задача 361a.

141. Докажите, что $2r < h \leq l \leq m \leq H \leq L \leq M < d \leq 2R$. Равенство $m = H$ справедливо только для правильного треугольника. Неравенство остается верным и если под R понимается

радиус наименьшего круга, содержащего треугольник. Укажите треугольники, для которых H/d и $H/(2R)$ сколь угодно близко 1. Укажите треугольники, для которых m/r стремится к 2.

Указание. Пусть $a \geq b \geq c$, тогда $m = m_a$, $H = h_c \geq h_b$. Пусть D — середина BC , DE, DF — перпендикуляры на другие стороны. Тогда $BC = h_c/2 \geq h_b/2 = DF$. Если $m > H$, то угол $\angle DAE < 30^\circ$, $\angle DAF < 30^\circ$, откуда $\angle A = \angle DAE + \angle DAF < 60^\circ$, но против наибольшей стороны a должен быть угол не меньший 60° . Противоречие означает, что $m \leq H$. Равенство $m = H$ возможно лишь когда $\angle A \leq 60^\circ$, но этот угол должен быть не меньше 60° , значит он равен 60° , а так как он не меньше остальных углов, то остальные углы тоже равны 60° .

☞ 142. Докажите, что если $H = M$, или $L = M$, или $H = L$, то треугольник равнобедренный.

Указание. Применить задачи 138, 139, 140.

☞ 143. Докажите, что если $h = m$, или $l = m$, или $h = l$, то треугольник равнобедренный.

Указание. Применить задачи 138, 139, 140.

☞ 144. Докажите, что если $a = B$, где $a = h, l, m$ $B = H, L, M$, то треугольник правильный.

Указание. Применить задачу 141.

Следующая задача предлагалась на Всесоюзной олимпиаде.

☞ 145. (ВМО, 1967) Докажите, что если медиана, биссектриса и высота, проведенные из разных вершин, равны, то треугольник правильный.

Указание. Пусть $h_a = l_b = m_c$. Тогда $h_a \geq h_c, h_b$, т.е. $h_a = H$. Далее, $m_c \leq m_b, m_a$, поэтому $m_c = m$. Примените задачу 144.

☞ 146. Из каждой вершины основания данного треугольника проведена биссектриса и перпендикуляр к ней. Прямая, соединяющая вершину угла, образованного этими перпендикулярами, с вершиной данного треугольника, является биссектрисой этого угла. Докажите, что треугольник равнобедренный.

Указание. Можно считать, что описанная вокруг треугольника окружность имеет единичный диаметр. Обозначим боковые стороны его a, b , а углы, лежащие против них — $2\alpha, 2\beta$. Угол, образованный перпендикулярами, обозначим 2γ , а отрезок, соединяющий его вершину с вершиной треугольника обозначим l . Из теоремы синусов имеем $a = \sin 2\alpha, b = \sin 2\beta$,

$$a/\sin \gamma = l/\sin(\pi/2 + \beta) = l/\cos \beta, b/\sin \gamma = l/\cos \alpha,$$

откуда $\sin 2\alpha \cos \beta = l \sin \gamma = \sin 2\beta \cos \alpha$, значит

$$2 \sin \alpha \cos \alpha \cos \beta = 2 \sin \beta \cos \beta \cos \alpha, \sin \alpha = \sin \beta,$$

а так как $0 < \alpha, \beta < \pi/2$, то $\alpha = \beta$.

Неравенства для медиан, высот и биссектрис

☉ 147. Докажите, что

$$\frac{3}{2}p < m_a + m_b + m_c < 2p.$$

Укажите треугольники, для которых $(m_a + m_b + m_c)/p$ сколь угодно близко к 2 и к $3/2$.

☉ 148. Докажите, что $p < l_a + l_b + l_c$. Укажите треугольники, для которых $(h_a + h_b + h_c)/p$ сколь угодно близко к 0. Укажите треугольники, для которых $(l_a + l_b + l_c)/p$ сколь угодно близко к 1.

☉ 149. Докажите, что $H \leq L \leq M < p$. Укажите треугольники, для которых H/p сколь угодно близко к 1. Укажите треугольники, для которых m/p сколь угодно близко к 0.

☉ 150. Докажите, что $d < 4M/3$. Укажите треугольники, для которых d/M сколь угодно близко к $4/3$.

Указание. Спроектировать медиану на наибольшую сторону.

☉ 151. Докажите, что $d < 3L/2$. Укажите треугольники, для которых d/L сколь угодно близко к $3/2$.

Указание. Спроектировать биссектрису на наибольшую сторону. Применить теорему о делении биссектрисой противоположной стороны.

☉ 152**. Найдите минимальное значение L/R .

Еще несколько неравенств для остроугольных и прямоугольных треугольников

☉ 153*. Докажите, что $p \leq \sqrt{3}H \leq \sqrt{3}L \leq \sqrt{3}M$.

Указание. Свести к случаю равнобедренного треугольника (с данной боковой высотой).

☉ 154*. Докажите, что $r + R \leq H < p$. Укажите треугольники, для которых $p/(r + R)$ сколь угодно близко к 1.

☉ 155*. Докажите, что $d \leq 2R \leq \sqrt{2}H$. Первое равенство возможно только для прямоугольных треугольников. Второе равенство возможно только для равнобедренного прямоугольного треугольника. Укажите тупоугольные треугольники, для которых H/R сколь угодно близко к 0.

Указание. Свести к случаю равнобедренного треугольника (с наибольшими боковыми высотами).

☉ 156. (Венгрия, 1969) Докажите, что $m_a + m_b + m_c > 4R$ для остроугольного и прямоугольного треугольников, а для тупоугольного с любым заданным тупым углом это неверно.

☉ 157. Докажите, что $h_a + h_b + h_c > 2R$ для остроугольного и прямоугольного треугольников, а для тупоугольного треугольника $(h_a + h_b + h_c)/R$ может стремиться к нулю. Покажите, что для равнобедренного треугольника $(l_a + l_b + l_c)/R$ может стремиться к 2.

1.7 Неравенства для четырехугольников

Стороны четырехугольника обозначаем a, b, c, d . Начинаем с четырехугольников частного вида.

Параллелограммы и трапеции

158. Из всех параллелограммов с данным острым углом и данным периметром наибольшую площадь имеет ромб.

159. Докажите, что площадь параллелограмма не меньше произведения его высот и найдите условие равенства.

160. (Московская областная олимпиада, 1984) Среди всех четырехугольников с данными диагоналями и данным углом между ними наименьший периметра имеет параллелограмм.

161. Среди ромбов, лежащих внутри данного прямоугольника, найти ромб а) наибольшей площади б) наибольшего периметра.

Указание. Все вписанные в данный прямоугольник ромбы подобны друг другу.

162. Из всех трапеций с данными основаниями и данным периметром наибольшую площадь имеет равнобедренная.

163. Из всех трапеций с данными основаниями и данной площадью (или, что равносильно, высотой) наименьший периметр имеет равнобедренная.

164. Пусть у трапеции основания равны a и b . Докажите, что средняя линия трапеции равна $(a + b)/2$, прямая, проходящая через точку пересечения диагоналей, пересекается с трапецией по отрезку, равному $2/(1/a + 1/b)$, прямая, делящая площадь трапеции пополам, пересекается с ней по отрезку, равному $\sqrt{(a^2 + b^2)/2}$, прямая, делящая трапецию на две подобные трапеции, пересекается с ней по отрезку, равному $\sqrt{ab}$. Выведите

отсюда неравенства

$$2/(1/a + 1/b) \leq \sqrt{ab} \leq (a+b)/2 \leq \sqrt{(a^2 + b^2)/2}.$$

Решение этой задачи можно найти в [8].

❶ 165. Если одна вершина параллелограмма находится в начале координат, а две другие имеют координаты (x_i, y_i) , то его площадь равна $|x_1y_2 - x_2y_1|$. Если отбросить знак модуля, то получится формула для *ориентированной* площади, полезная в некоторых задачах. Выведите из нее «координатную» формулу для площади треугольника.

Указание. Проверьте эту формулу для прямоугольных треугольников с катетами, параллельными осям координат. Сведите задачу вычисления площади произвольного треугольника к треугольникам указанного вида.

Вписанные и описанные четырехугольники

Из школьных учебников известно, что в треугольник всегда можно вписать окружность и вокруг него всегда можно описать окружность. Для четырехугольников это верно не всегда, однако известны простые признаки, когда это можно сделать.

❶ 166. Вокруг четырехугольника можно описать окружность тогда и только тогда, когда суммы противоположных углов в нем равны.

❶ 167. В четырехугольник можно вписать окружность тогда и только тогда, когда суммы противоположных сторон в нем равны.

❶ 168. Если $ABCD$ — вписанный в окружность четырехугольник, и K, L, M, N — перпендикулярные проекции точки пересечения его диагоналей на его стороны. Докажите, что четырехугольник $KLMN$ — описанный вокруг некоторой окружности.

Указание. Четырехугольник $PNAK$, где P — точка пересечения диагоналей, N — проекция на AD , K — проекция на AB ,

описанный. Поэтому $\angle PAN = \angle PKN = \angle LBP = \angle LKP$, где L — проекция на CB , т.е. KP — биссектриса $\angle LKN$.

❶ 169. Если $ABCD$ — вписанный в окружность четырехугольник с перпендикулярными диагоналями, и K, L, M, N — перпендикулярные проекции точки P пересечения его диагоналей на его стороны. Пусть R — радиус описанной вокруг $ABCD$ окружности, r — радиус вписанной в четырехугольник $KLMN$ окружности, d — расстояние между центром большей окружности и точкой P . Докажите, что $R^2 - 2rR = d^2$.

❶ 170. В условиях задачи 169 докажите, что четырехугольник $KLMN$ также является вписанным и в ту же окружность вписан четырехугольник, образованный серединами сторон четырехугольника $ABCD$. Если R' — радиус этой окружности, то $R' = \frac{1}{2}\sqrt{2R^2 - d^2}$.

Указание. Центр этой окружности лежит в середине OP .

В следующей задаче речь идет о четырехугольнике, вписанном и описанном одновременно. Эта задача является аналогом теоремы Эйлера-Чапмена и частным случаем теоремы Понселе (см. [30]).

❶ 171*. Докажите, что расстояние между центрами вписанной и описанной окружностей четырехугольника вычисляется по формуле $\rho = \sqrt{r^2 + R^2 - r\sqrt{r^2 + 4R^2}}$. Докажите, что если расстояние между центрами окружностей радиусов R, r равно d , то для каждой точки большей окружности найдется вписанный в нее и описанный вокруг меньшей окружности четырехугольник с вершиной в этой точке.

Указание. Применить задачи 168, 169, 170 и доказать, что

$$\frac{1}{r^2} = \frac{1}{(R + \rho)^2} + \frac{1}{(R - \rho)^2}.$$

Автор следующих задач — тот самый знаменитый астроном Птолемей, который написал «Альмагест», содержащий геоцентрическую картину мира.

172. (Теорема Птолемея) Если e, f — диагонали вписанного четырехугольника, то

$$ef = ac + bd.$$

173. (Обобщенная теорема Птолемея) Если α — сумма противоположных углов, то

$$(ef)^2 = (ac)^2 + (bd)^2 - 2abcd \cos \alpha.$$

174. (Неравенство Птолемея) Для произвольного четырехугольника справедливо неравенство $ef \leq ac + bd$. Равенство для невырожденного четырехугольника имеет место только для вписанного четырехугольника.

175. Для произвольного четырехугольника справедливо неравенство $e^2 + f^2 \leq a^2 + b^2 + c^2 + d^2$. Равенство для невырожденного четырехугольника имеет место только для параллелограмма.

Из задачи 117 следует, что биссектриса треугольника меньше полусуммы окружающих ее сторон.

176. (Москва, 1986) Биссектриса треугольника продлена до пересечения с описанной вокруг треугольника окружностью. Докажите, что ее длина больше полусуммы окружающих ее сторон.

Указание. Применить теорему Птолемея.

Следующая задача принадлежит средневековому индийскому математику Брахмагупте.

177. (Брахмагупта) Если четырехугольник вписанный, то его площадь равна

$$\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)},$$

где a, b, c, d — стороны, а p — полупериметр. Если он одновременно и описанный, то $s = \sqrt{abcd}$.

Следующие задачи далее будут даны в более общем виде. Но читателю рекомендуется попробовать решить их сейчас.

178. Среди одновременно вписанных и описанных четырехугольников квадрат имеет наибольшую площадь.

В следующей задаче дается обобщенная формула Брахмагупты.

179*. (Формула Штейнера) Площадь четырехугольника с суммой противоположных углов α равна

$$\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d) - abcd \cos^2(\alpha/2)}.$$

Следующая задача принадлежит швейцарскому математику 18-го века Крамеру (тому самому, который открыл определители).

180. (Крамер) Среди всех четырехугольников с данными сторонами наибольшую площадь имеет вписанный в окружность. Площадь четырехугольника удовлетворяет неравенству

$$s \leq \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}.$$

Указание. Примените задачи 177, 179.

Следующая задача принадлежит Люилье, швейцарцу, академику Берлинской и С.-Петербургской академий наук, опубликовавшему свою книгу в Варшаве.

181*. (Люилье) Среди всех четырехугольников с данным периметром и данными направлениями сторон наибольшую площадь имеет описанный вокруг окружности.

У обоих этих задач известны чисто геометрические решения, но они не очень просты (см. [73, 37]).

Экстремальные свойства квадрата

Задачи этого раздела в дальнейшем будут обобщены. Но читателю полезно потренироваться в их решении.

182. Докажите, что среди всех прямоугольников данного периметра наибольшую площадь имеет квадрат. Среди всех прямоугольников данной площади наименьший периметр имеет квадрат.

☉ 183. Докажите, что среди всех четырехугольников данной площади наименьший периметр имеет квадрат. Среди всех четырехугольников данного периметра наибольшую площадь имеет квадрат.

☉ 184. Среди всех четырехугольников, вписанных в данный круг, наибольший периметр имеет квадрат, а среди всех четырехугольников, описанных вокруг данного круга, наименьший периметр имеет квадрат.

☉ 185. Среди всех четырехугольников, вписанных в данный круг, наибольшую площадь имеет квадрат, а среди всех четырехугольников, описанных вокруг данного круга, наименьшую площадь имеет квадрат.

И наконец,

Произвольные четырехугольники

Докажите следующие утверждения.

☉ 186. (*Вариньон*) Середины сторон четырехугольника образуют параллелограмм вдвое меньшей площади.

☉ 187. В четырехугольнике найти точку, сумма расстояний которой до вершин минимальна.

Указание. Это точка пересечения диагоналей.

☉ 188. Сумма длин диагоналей меньше периметра.

Указание. Примените неравенство треугольника.

☉ 189. (*Московская областная олимпиада, 1985*) Сумма расстояний от любой точки четырехугольника до его вершин не меньше $\sqrt{8s}$.

Указание. Примените задачу 187.

☉ 190. Минимальный диаметр выпуклого четырехугольника с единичными сторонами равен $\sqrt{2}$.

В следующих трех задачах D — это диаметр, H — ширина четырехугольника.

191. Справедливо точное неравенство $s \leq D^2/2$.

192. Справедливо неравенство $HD/2 < s$. Приведите примеры таких четырехугольников, у которых $HD/2s$ стремится к единице.

193**. Справедливо точное неравенство $p \leq (2 + 4 \sin \pi/12)D$.

Автору известно только косвенное и довольно сложное доказательство этого неравенства.

194. Пусть a, b, c, d — стороны четырехугольника. Докажите неравенства

$$2s \leq ab + cd, \quad 2s \leq ad + bc, \quad 2s \leq ac + bd,$$

$$4s \leq (a + c)(b + d), \quad 4s \leq (a + b)(c + d),$$

$$4s \leq a^2 + b^2 + c^2 + d^2, \quad 16s \leq (a + b + c + d)^2, \quad 4s \leq ef$$

и найдите условия их обращения в равенства.

Указание. Третье неравенство вытекает из первого, если один из треугольников, отсекаемых диагональю, отразить симметрично относительно срединного перпендикуляра к этой диагонали. Третье неравенство — сумма первых двух. Четвертое сумма второго и третьего. Пятое следует из любого из первых трех и неравенств $2xy \leq x^2 + y^2$. Шестое (кстати, это изопериметрическое неравенство для четырехугольника и из него следует задача 183) получается суммированием пятого, и удвоенных первых трех.

195. Докажите, что площадь произвольного четырехугольника равна

$$\frac{1}{4} \sqrt{4(ef)^2 - (a^2 - b^2 + c^2 - d^2)^2}.$$

196. Среди всех четырехугольников с данными сторонами наибольшую произведение диагоналей имеет вписанный в окружность.

☞ 197. У четырехугольника диагонали перпендикулярны если и только если

$$a^2 + c^2 = b^2 + d^2.$$

☞ 198*. Пусть $A_1A_2A_3A_4$ — выпуклый четырехугольник и O — точка внутри него. Докажите, что наименьший из углов OA_1A_2 , OA_2A_3 , OA_3A_4 , OA_4A_1 не больше 45 градусов. Приведите пример, когда справедливо равенство.

☞ 199*. Обозначим длины перпендикуляров, опущенных на прямые A_1A_2 , A_2A_3 , A_3A_4 , A_4A_1 из точки O через d_1, d_2, d_3, d_4 соответственно, а расстояния до вершин A_i через a_i . Докажите, что

$$a_1a_2a_3a_4 \geq 4d_1d_2d_3d_4.$$

Приведите пример, когда справедливо равенство.

1.8 Теоремы Юнга, Бляшке и Пала

Следующая теорема была доказана английским математиком Юнгом в 1901 году для n -мерного пространства. Мы ее формулируем в плоском случае.

Теорема 5 (Юнг). *Для произвольного (не обязательно выпуклого) многоугольника M (и вообще для любого замкнутого ограниченного множества на плоскости)*

$$R(M) \leq d(M)/\sqrt{3}.$$

Неравенство обращается в равенство лишь когда в многоугольник M можно вписать правильный треугольник того же диаметра, вписанный во внешнюю окружность многоугольника M .

Для доказательства достаточно применить утверждения задач 26, 77.

Следующая теорема была доказана известным немецким математиком Бляшке в 1914 году в плоском случае. Ее обобщение на n -мерное пространство, полученное Шейнхагеном, будет дано в одном из следующих разделов.

Теорема 6 (Бляшке). *Для выпуклого многоугольника M (и вообще для любого замкнутого выпуклого множества на плоскости)*

$$b(M) \leq 3r(M).$$

Неравенство обращается в равенство лишь для правильного треугольника.

Для доказательства применим утверждения задач 24, 27, 78. Можно считать, что внутренний круг касается в трех точках границы данной фигуры, и если через эти точки провести к нему касательные, то они будут опорными прямыми для нее, поэтому ограниченный ими треугольник будет содержать фигуру, и иметь не меньшую, чем она ширину. Равенство возможно лишь когда этот треугольник правильный и его ширина равна ширине фигуры, значит фигура содержит его вершины, а потому и весь треугольник, т.е. совпадает с ним.

Следующая теорема была доказана в 1921 г. венгерским математиком Ю. Палом.

Теорема 7 (Пал). *Для выпуклого многоугольника M (и вообще для любого замкнутого выпуклого множества на плоскости)*

$$s(M) \geq b^2(M)/\sqrt{3}.$$

Неравенство обращается в равенство лишь для правильного треугольника.

Далее приводится доказательство, по-видимому, отличное от доказательства Пала, а также отличное от решения соответствующей задачи из [77]. Впишем в M треугольник ABC наибольшей площади, обозначим его высоты h_a, h_b, h_c , построим треугольник $A_1B_1C_1$ так, чтобы его средние линии образовывали треугольник ABC (C оказалась серединой A_1B_1 и т.д.), выберем в пересечении M с треугольником A_1BC точку A_2 , наиболее удаленную от прямой BC , обозначим расстояние от нее до этой прямой через d_A , и аналогично выберем точки B_2, C_2 и определим расстояния d_B, d_C (возможно, что выбор точек A, B, C, A_2, B_2, C_2 неоднозначен). Заметим, что M содержится внутри треугольника ABC ,

так как в противном случае в M нашлась бы точка, удаленная от одной из его сторон на расстояние, большее опущенной в этом треугольнике на эту сторону высоты, и тогда эта точка образовывала бы с этой стороной треугольник большей площади, чем ABC , что противоречит выбору треугольника ABC . Поэтому $d_a \leq h_a, d_b \leq h_b, d_c \leq h_c$, причем, если $d_a = d_b = d_c = 0$, то M совпадает с треугольником ABC , а если $d_a = h_a, d_b = h_b, d_c = h_c$, то $A_2 = A_1, B_2 = B_1, C_2 = C_1$, и тогда M совпадает с треугольником $A_1B_1C_1 = A_2B_2C_2$. Эти случаи назовем вырожденными. Проведем через A_2 прямую, параллельную BC , и аналогично проведем прямые через B_2 и C_2 . Многоугольник, отсекаемый ими от треугольника $A_1B_1C_1$ (в невырожденном случае, вообще говоря, шестиугольник) обозначим через M_1 . В силу выбора точек A_2, B_2, C_2 он накрывает, что доказывается также, как накрытие треугольником $A_1B_1C_1$.

Многоугольник (в невырожденном случае, вообще говоря, шестиугольник) $AC_2BA_2CB_2$ обозначим M_2 , а его площадь — через s_2 . В силу выпуклости он содержится в нем. В невырожденном случае не является треугольником, так как не существует треугольника, лежащего в многоугольнике M_1 и содержащего многоугольник M_2 .

200. Докажите это, а также, что

$$\min\{h_a + d_a, h_b + d_b, h_c + d_c\} \geq b(M),$$

$$s(M) \geq s_2 = S_{ABC} \left(1 + \frac{d_a}{h_a} + \frac{d_b}{h_b} + \frac{d_c}{h_c}\right),$$

где S_{ABC} — площадь треугольника ABC .

Указание. Воспользуйтесь тем, что

$$s_2 = S_{ABC} + S_{A_2BC} + S_{AB_2C} + S_{ABC_2},$$

а ширина M_1 не больше $\min\{h_a + d_a, h_b + d_b, h_c + d_c\}$.

201. Докажите, что при $0 \leq x \leq 3$ справедливо неравенство

$$\frac{1+x}{(3+x)^2} \geq \frac{1}{9},$$

которое обращается в равенство лишь при $x = 0$ или $x = 3$.

Положим для краткости $\lambda_a = d_a/h_a$, $\lambda_b = d_b/h_b$, $\lambda_c = d_c/h_c$, $\lambda = \lambda_a + \lambda_b + \lambda_c$ и заметим, что $0 \leq \lambda_a \leq 1$, $0 \leq \lambda_b \leq 1$, $0 \leq \lambda_c \leq 1$, откуда $0 \leq \lambda \leq 3$. Из задач 82, 85 следует, что

$$S_{ABC} \geq 3\sqrt{3}r^2 = \frac{3\sqrt{3}}{\left(\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}\right)^2}.$$

Умножая обе части неравенства

$$\min\{h_a + d_a, h_b + d_b, h_c + d_c\} \geq b(M)$$

на $h_a^{-1} + h_b^{-1} + h_c^{-1}$, получаем, что

$$\begin{aligned} \frac{h_a + d_a}{h_a} + \frac{h_b + d_b}{h_b} + \frac{h_c + d_c}{h_c} &\geq \\ &\geq \min\{h_a + d_a, h_b + d_b, h_c + d_c\} (h_a^{-1} + h_b^{-1} + h_c^{-1}) \\ &\geq b(M) (h_a^{-1} + h_b^{-1} + h_c^{-1}), \end{aligned}$$

что равносильно

$$3 + \lambda = 3 + \lambda_a + \lambda_b + \lambda_c \geq b(M) (h_a^{-1} + h_b^{-1} + h_c^{-1}),$$

откуда имеем

$$\frac{1}{\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}} \geq \frac{b(M)}{3 + \lambda}.$$

Поэтому

$$S_{ABC} \geq \frac{3\sqrt{3}}{\left(\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}\right)^2} \geq \frac{3\sqrt{3}(b(M))^2}{(3 + \lambda)^2},$$

следовательно

$$\begin{aligned} s(M) &\geq S_{ABC} \left(1 + \frac{d_a}{h_a} + \frac{d_b}{h_b} + \frac{d_c}{h_c}\right) = \\ &= S_{ABC}(1 + \lambda) \geq \frac{3\sqrt{3}(1 + \lambda)(b(M))^2}{(3 + \lambda)^2} \geq \frac{(b(M))^2}{\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

Равенство возможно лишь при $\lambda = 0$ или $\lambda = 3$, т.е. в вырожденном случае, но тогда M является треугольником. В случае треугольника неравенство $s \geq b^2/\sqrt{3}$ доказано в задаче 84 или в теореме 1, и равенство возможно лишь для правильного треугольника.

1.9 Неравенства для выпуклых многоугольников

Пусть M_n — произвольный выпуклый n -угольник, p_n — его периметр, d_n — диаметр, b_n — ширина, R_n — внешний радиус, r_n — внутренний радиус, s_n — квадратный корень из его площади. Справедливы следующие неравенства (индекс n опускаем), которые далее будут доказаны.

	r	R	b	d	s	p
r		$\frac{r}{R} > 0$	$\frac{r}{b} \geq \frac{1}{3}$	$\frac{r}{d} > 0$	$\frac{r}{s} > 0$	$\frac{r}{p} > 0$
R	$\frac{r}{R} \leq \cos \frac{\pi}{n}$		$\frac{b}{R} \leq \frac{\sin \frac{\pi}{n}}{\operatorname{tg} \frac{\pi}{2n}}$	$\frac{d}{R} \leq 2$	$\left(\frac{s}{R}\right)^2 \leq \frac{n}{2} \sin \frac{2\pi}{n}$	$\frac{p}{R} > 4$
b	$\frac{b}{r} \geq 2$	$\frac{b}{R} \geq 0$		$\frac{b}{d} > 0$	$\frac{b}{s} > 0$	$\frac{b}{p} > 0$
d	$\frac{r}{d} \leq \frac{\sin \frac{\pi}{2n}}{\operatorname{tg} \frac{\pi}{n}}$	$\frac{R}{d} \leq \sqrt{3}$	$\frac{b}{d} \leq \cos \frac{\pi}{2n}$		$\left(\frac{s}{d}\right)^2 \leq \frac{n}{2} \cos \frac{\pi}{n} \operatorname{tg} \frac{\pi}{2n}$	$\frac{p}{d} \leq 2n \sin \frac{\pi}{2n}$
s	$\left(\frac{s}{r}\right)^2 \geq n \operatorname{tg} \frac{\pi}{n}$	$\frac{s}{R} > 0$	$\frac{b}{s} \leq 3^{1/4}$	$\frac{s}{d} > 0$		$\frac{s}{p} > 0$
p	$\frac{p}{r} \geq 2n \operatorname{tg} \frac{\pi}{n}$	$\frac{p}{R} \leq 2n \sin \frac{\pi}{n}$	$\frac{p}{b} \geq 2n \operatorname{tg} \frac{\pi}{2n}$	$\frac{p}{d} > 2$	$\left(\frac{p}{s}\right)^2 \geq 4n \operatorname{tg} \frac{\pi}{n}$	

Таблица 1

202. Докажите, что все неравенства таблицы 1 улучшить нельзя, точнее часть из них обращается в равенство для правильных n -угольников, часть обращается в равенство для многоугольников, вырождающихся в правильный треугольник, а остальные обращаются в равенство, когда многоугольник вырождается в отрезок.

Хотите узнать, как решается эта задача — читайте дальше.

Изопериметрические неравенства

Теорема 8. Пусть P — полупериметр, s — площадь, r — внутренний, а R — внешний радиус выпуклого n -угольника M . Тогда справедливы неравенства

$$nr \operatorname{tg} \frac{\pi}{n} \leq P \leq nR \sin \frac{\pi}{n},$$

$$r^2 n \operatorname{tg} \frac{\pi}{n} \leq s \leq R^2 \frac{n}{2} \sin \frac{2\pi}{n}.$$

Каждое из неравенств точное, и достигается только для правильного n -угольника M .

Доказательство этой теоремы легко можно вывести из следующих задач.

❶ 203. Среди вписанных в данную окружность n -угольников максимальный периметр и максимальную площадь имеет правильный.

Приведем прямое решение этой задачи, содержащееся в [59]. Допустим, что n -угольник неправильный. Разрежем его на треугольники с общей вершиной в центре окружности. Среди них есть один с углом при вершине большим $2\pi/n$, и один — с меньшим $2\pi/n$. Переставим треугольники, составляющие n -угольник, так, чтобы эти два треугольника оказались рядом. Ни периметр, ни площадь n -угольника при этом не изменятся. Передвигая вдоль окружности общую вершину этих треугольников так, чтобы угол большего из этих треугольников оказался равен $2\pi/n$, и применяя задачу 43, получаем, что у n -угольника и площадь и периметр увеличатся. Повторяя, в случае необходимости, проведенное рассуждение, получаем в конце концов правильный n -угольник, у которого и площадь и периметр будут больше, чем у исходного.

Прямое доказательство явно указывает, что неправильный n -угольник имеет меньшую площадь и меньший периметр, чем правильный. Но допустим, что нам известно существование, экстремального n -угольника. Тогда доказать, что он может быть

только правильным, можно короче. Для этого не нужно переставлять треугольники, составляющие n -угольник, а достаточно выбрать два соседних из них с разными углами при вершинах, и передвинуть их общую вершину вдоль окружности так, чтобы их «центральные» углы сравнялись. Применяя после этого задачу 42 (а она чуть проще, чем 43), получаем, что у нового n -угольника площадь и периметр увеличились, что невозможно в силу его экстремальности.

Подобные доказательства называются косвенными. Их недостаток — необходимость предполагать существование экстремальной фигуры. До появления строгой теории пределов и теории действительных чисел существование экстремума у любой разумно поставленной задачи на максимум и минимум считалось очевидным. Это и сейчас кажется очевидным тем, кто не знаком с теорией действительных чисел. Для тех же, кто знает эту теорию, этот также не нуждается в доказательстве (потому, что они его легко могут провести сами по известной им схеме). Поэтому мы здесь не будем обсуждать подобные вопросы, а интересующегося ими читателя адресуем, например к [9, 36, 56].

Далее мы рекомендуем читателю свободно пользоваться косвенными рассуждениями (если не удастся придумать прямые), но при прочих равных условиях сами будем предпочитать прямые рассуждения (не отвергая при этом красивые косвенные).

Для следующей задачи в [69] приведено прямое рассуждение, которое мы и воспроизводим.

❶ 204. Среди описанных вокруг данной окружности n -угольников минимальный периметр и минимальную площадь имеет правильный.

Указание. Пусть P — произвольный n -угольник, описанный вокруг круга k , и P_n — соответствующий правильный n -угольник. Обозначим K описанный вокруг P_n круг, и s_i , $i = 1, \dots, n$ — равные сегменты, отсекаемые от него сторонами n -угольника P . Тогда площадь пересечения $K \cap P$ равна

$$K - (s_1 + \dots + s_n) + (s_1 \cap s_2 + s_2 \cap s_3 + \dots + s_{n-1} \cap s_n),$$

где K обозначает также площадь круга K , s_i — площади сегментов s_i , $s_{i-1} \cap s_i$ — площади их пересечений. Так как площадь P_n равна $K - (s_1 + \dots + s_n)$, то площадь $K \cap P$ не меньше площади P_n , и тем более это верно для площади P , причем равенство возможно лишь когда сегменты не пересекаются, т.е. когда ни одна из вершин P не лежит внутри K , т.е. когда $P = P_n$.

Косвенное решение, подобное решению предыдущей задачи, предлагается придумать читателю самостоятельно.

Еще одно прямое решение двух предыдущих задач можно получить с помощью следующих задач.

❶ 205. Для вписанного в окружность радиуса R выпуклого n -угольника, у которого из ее центра стороны видны под углами $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, справедливы равенства

$$s = \frac{R^2}{2} (\sin \alpha_1 + \dots + \sin \alpha_n),$$

$$P = R \left(\sin \frac{\alpha_1}{2} + \dots + \sin \frac{\alpha_n}{2} \right).$$

❷ 206. Для описанного вокруг окружности радиуса r выпуклого n -угольника с данными углами $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ справедливы равенства

$$s = r^2 \left(\operatorname{ctg} \frac{\alpha_1}{2} + \dots + \operatorname{ctg} \frac{\alpha_n}{2} \right),$$

$$P = r \left(\operatorname{ctg} \frac{\alpha_1}{2} + \dots + \operatorname{ctg} \frac{\alpha_n}{2} \right).$$

Алгебраические решения этих двух задач легко получить, если знать, что такое

Неравенство Йенсена для выпуклых функций

Функция, определенная на интервале (a, b) , называется *выпуклой*, если для нее справедливо неравенство

$$\frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} \leq f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right).$$

Если это неравенство обращается в равенство только при $x_1 = x_2$, то функция называется *строго выпуклой*. (аналогично можно ввести понятие вогнутой функции, или выпуклой вниз).

☉ 207. Докажите, что если вторая производная этой функции неположительна на всем интервале, то функция выпукла, а если эта производная отрицательна, то функция строго выпукла. Докажите аналогичное утверждение для вогнутых функций.

☉ 208*. Докажите, используя предыдущую задачу, что $\sin x$ строго выпукла на $(0, \pi)$, функция $\cos x$ строго выпукла на отрезке $(-\pi/2, \pi/2)$, функция $\operatorname{tg} x$ строго вогнута на $(0, \pi/2)$, функция $\operatorname{ctg} x$ строго выпукла на $(0, \pi/2)$, функция $1/\cos x$ строго вогнута на $(0, \pi/2)$, функция $1/\sin x$ тоже, функция $\log_a x$ при $a > 1$ строго выпукла на $(0, \infty)$, функция $\log_a \cos x$ при $a > 1$ строго выпукла на $(-\pi/2, \pi/2)$, функция $\log_a \sin x$ при $a > 1$ строго выпукла на $(0, \pi)$, функции $\log_a 1/\sin x$ и $\log_a 1/\cos x$ при $a > 1$ строго вогнуты на $(0, \pi/2)$.

Докажите то же самое тригонометрически, не пользуясь предыдущей задачей.

Докажите то же самое геометрически.

Указание. Применить задачу 117 и получить неравенства

$$l_a < \sqrt{bc} \leq (b+c)/2.$$

☉ 209. Если $f(x)$ выпукла на некотором интервале, то

$$\frac{f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + f(x_4)}{4} \leq f\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{n}\right).$$

Если $f(x)$ выпукла на некотором интервале, то при $n = 2^k$

$$\frac{f(x_1) + \dots + f(x_n)}{n} \leq f\left(\frac{x_1 + \dots + x_n}{n}\right).$$

Указание: индукция по k .

Теорема 9 (Гёльдер-Йенсен). Если $f(x)$ выпукла на некотором интервале, то

$$\frac{f(x_1) + \dots + f(x_n)}{n} \leq f\left(\frac{x_1 + \dots + x_n}{n}\right).$$

Если к тому же она непрерывна, то для любых $\alpha_i \geq 0$, $\alpha_1 + \dots + \alpha_n = 1$,

$$\alpha_1 f(x_1) + \dots + \alpha_n f(x_n) \leq f(\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n).$$

Доказательство этой теоремы можно найти, например в [7, 63].

Известно, что ограниченная выпуклая функция всегда непрерывна.

❖ **210. (Неравенство между средними)** Докажите, что для любых положительных чисел x_i

$$\frac{n}{\frac{1}{x_1} + \dots + \frac{1}{x_n}} \leq \sqrt[n]{x_1 \dots x_n} \leq \frac{x_1 + \dots + x_n}{n} \leq \sqrt{\frac{x_1^2 + \dots + x_n^2}{n}}.$$

Указание. Одно из многих решений этой задачи легко получить с помощью теоремы 9.

❖ **211.** Докажите, что для любых $\alpha_i > 0$, если $\alpha_1 + \dots + \alpha_n = \pi$, то

$$\sin \alpha_1 + \dots + \sin \alpha_n \leq n \sin \pi/n,$$

а если $\alpha_1 + \dots + \alpha_n = 2\pi$, то

$$\sin \alpha_1 + \dots + \sin \alpha_n \leq n \sin 2\pi/n.$$

Указание. Одно из многих решений этой задачи также легко получить с помощью теоремы 9.

❖ **212.** Докажите, что для любых $\alpha_i > 0$, если $\alpha_1 + \dots + \alpha_n = \pi$, то

$$\operatorname{tg} \alpha_1 + \dots + \operatorname{tg} \alpha_n \leq n \operatorname{tg} \pi/n.$$

Указание. И этой тоже.

❶ 213. Докажите, что неравенства теоремы 8 равносильны неравенствам задач 211, 212.

❶ 214. Докажите, что для любых α_i , $|\alpha_i| < \pi/2$, $i = 1, \dots, n$, справедливо неравенство

$$\cos \alpha_1 \dots \cos \alpha_n \leq \cos^n ((\alpha_1 + \dots + \alpha_n)/n),$$

а при дополнительном условии $\alpha_1 + \dots + \alpha_n = \pi$ — неравенство

$$\cos \alpha_1 \dots \cos \alpha_n \leq \cos^n (\pi/n).$$

Указание. И здесь помогает теорема 9.

Использование выпуклых функций

❶ 215. Строго выпуклая функция достигает минимума на концах отрезка, на котором она определена. Для вогнутой функции вместо минимума речь идет о максимуме.

❶ 216. Строго выпуклая функция имеет единственный максимум, а вогнутая — единственный минимум.

❶ 217. Пусть точка M лежит вне прямой l , а точка P движется по ней. Докажите, что длина отрезка PM является строго вогнутой функцией от а) координаты точки P на прямой (при любом выборе начала координат) б) угла, образованного отрезком PM с любой заданной прямой в) логарифм по основанию $a > 1$ длины отрезка PM является строго вогнутой функцией от указанного угла.

Указание. Применить задачу 208.

❶ 218. Пусть точка M движется по прямой a , а $d(M)$ — ее расстояние до скрещивающейся с ней прямой b (прямые расположены в пространстве). Докажите, что функция $d(M)$ от координаты точки M на прямой a является строго вогнутой.

Указание. Проведем через b плоскость, параллельную a . Пусть M' проекция M на эту плоскость, а M'' — проекция M на прямую b (поэтому $|MM''| = d(M)$). Тогда $M'M''$ перпендикулярна MM' , MM' имеет постоянную длину,

$$d(M) = \sqrt{|MM'|^2 + |M'M''|^2} = \sqrt{x^2 + h^2},$$

где x координата точки M на прямой a (при подходящем выборе начала координат и единицы длины). Остается применить задачу 217 а).

219. Проведем через внутреннюю точку M выпуклого многоугольника прямую, пересекающую его по отрезку AB . Докажите, что длина этого отрезка максимальна тогда и только тогда, когда A или B совпадает с одной из вершин многоугольника.

Указание. Проведем через M прямые через вершины многоугольника. Пусть углы, образованные этими прямыми с фиксированной прямой, проходящей через M , есть $0 \leq \alpha_1 < \dots < \alpha_n < 2\pi$. Согласно задаче 217 длина AB является кусочно вогнутой функцией, строго вогнутой на каждом отрезке $[\alpha_i, \alpha_{i+1}]$ (как сумма строго вогнутых функций). Согласно задаче 215 максимума она достигает на одном из концов отрезка $[\alpha_i, \alpha_{i+1}]$.

Доказанное утверждение справедливо, в частности для четырехугольника и точки пересечения его диагоналей: прямая, проходящая через точку пересечения диагоналей, пересекает четырехугольник по отрезку, длина которого не больше длины одной из диагоналей (решение, не использующее выпуклость, см. в решении задачи 15.32 б) из [53]). Также оно справедливо и для невыпуклых, но звездных относительно точки многоугольников.

220. Докажите, что сечение тетраэдра имеет периметр не больше, чем периметр одной из его граней.

Указание. Если сечение треугольное, то можно применить задачи 217, 215 и сдвигая по очереди вершины сечения по ребрам, совместить его с одной из граней. В силу выпуклости и задачи 215 это можно делать так, чтобы периметр не убывал. Если сече-

ние четырехугольное, до действуя аналогичным образом (не смущаясь, что четырехугольное сечение может перестать быть плоским четырехугольником), переместим все его вершины в вершины тетраэдра. Получим либо треугольную грань, либо ребро.

☞ 221. Докажите, что треугольное сечение тетраэдра имеет площадь не больше, чем максимальная площадь его граней.

Указание. Передвигая одну из вершин сечения по ребру, грани, заметим, что ее площадь будет строго вогнутой функцией от координаты этой вершины (применим задачу 218, рассматривая высоту треугольного сечения). Применяя задачу 215, можно передвинуть вершину сечения до совмещения с одной из вершин тетраэдра так, чтобы его площадь не уменьшилась. Повторяя эту процедуру, совместим сечение с одной из граней.

☞ 222. Докажите, что четырехугольное сечение тетраэдра имеет площадь не больше, чем максимальная площадь его граней.

Указание. Рассмотрим проекцию тетраэдра на плоскость, перпендикулярную диагонали сечения. Само сечение при этом проектируется в отрезок, совпадающий с проекцией второй диагонали, а первая диагональ — в точку. Если угол между диагоналями равен ϕ , то площадь сечения равна половине произведения диагоналей на $\sin \phi$, а так как длина проекции второй диагонали равна длине диагонали, умноженной на $\sin \phi$, то эта площадь равна половине произведения указанной проекции одной диагонали на другую диагональ. При указанном проектировании тетраэдр превращается в выпуклый четырехугольник, а упомянутая диагональ проектируется на прямую, проходящую через точку пересечения диагоналей этого четырехугольника. Применяя задачу 219 для случая четырехугольника, получаем, что упомянутая проекция сечения имеет длину, не большую одной из диагоналей четырехугольника. В эту диагональ проектируется треугольное сечение тетраэдра, и его площадь будет не меньше площади рассматриваемого четырехугольного сечения (площадь треугольного сечения тоже равна половине произведения длины его проекции, т.е. одной из указанных диагоналей, на длину диагонали

четырёхугольного сечения, проектирующей в точку). Остается применить задачу 221.

☛ 223. Один выпуклый четырёхугольник находится внутри другого. Докажите, что сумма его сторон и диагоналей меньше $4/3$ от подобной величины для второго четырёхугольника.

Пространственный вариант предыдущей задачи предлагался на Всесоюзной олимпиаде.

☛ 224. (ВМО, 1982) На гранях тетраэдра выбрано по точке, которые тоже образуют вписанный тетраэдр. Докажите, что периметр (сумма длин ребер) вписанного тетраэдра меньше $4/3$ периметра большего тетраэдра.

Указание. Передвигая по очереди вершины и используя задачи 217, 215, можно, не уменьшая периметра вписанного тетраэдра, поместить все его вершины сначала на ребра, а потом и в вершины исходного тетраэдра. Остается перебрать все варианты, пользуясь неравенством треугольника. Если три вершины тетраэдра близки друг к другу, а третья далека от них, то указанное неравенство почти достигается. Тот факт, что периметр объемлющего тетраэдра может быть меньше периметра объемлемого довольно удивителен. Решение без явного использования выпуклости см. в [15]. Решение, использующее метод усреднения, см. в [53], задача 11.57.

Неравенства с углами в выпуклых многоугольниках

☛ 225*. Пусть $A_1A_2\dots A_n$ — выпуклый n -угольник и O — точка внутри него. Докажите, что наименьший из углов $\angle OA_1A_2$, $\angle OA_2A_3, \dots, \angle OA_{n-1}A_n$, $\angle OA_nA_1$ не больше $\pi/2 - \pi/n$. Приведите пример, когда справедливо равенство.

Указание. Обозначим эти углы через α_i , $i = 1, \dots, n$, углы $\angle A_1OA_2$, $\angle A_2OA_3, \dots, \angle A_{n-1}OA_n$, $\angle A_nOA_1$ через $\beta_1, \dots, \beta_n$, а стороны OA_i через a_i , $i = 1, \dots, n$. Допустим, что $\alpha_i > \pi/2 - \pi/n$,

$i = 1, \dots, n$, тогда из теоремы синусов следует, что

$$\begin{aligned} \frac{a_{i+1}}{a_i} &= \frac{\sin \alpha_i}{\sin(\pi - \alpha_i - \beta_i)} > \frac{\sin(\pi/2 - \pi/n)}{\sin(\pi - (\pi/2 - \pi/n) - \beta_i)} = \\ &= \frac{\cos(\pi/n)}{\cos(\beta_i - \pi/n)}. \end{aligned}$$

Это неравенство не вытекает из монотонности синуса, но вытекает из того факта, что в треугольнике $OA_{i+1}A_i$ при фиксированном β_i отношение a_{i+1}/a_i монотонно растет с ростом α_i . Из неравенств $\alpha_i > \pi/2 - \pi/n$ следует, что $\beta_i < \pi/2 + \pi/n$, $i = 1, \dots, n$, а так как $\beta_1 + \dots + \beta_n = 2\pi$, то в силу задачи 214

$$\prod_{i=1}^n \cos(\beta_i - \pi/n) \leq \cos^n \left(\left(\sum_{i=1}^n \beta_i - \pi \right) / n \right) = \cos^n(\pi/n)$$

получаем противоречие:

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{a_2}{a_1} \frac{a_3}{a_2} \dots \frac{a_n}{a_{n-1}} \frac{a_1}{a_n} > \frac{\cos^n(\pi/n)}{\prod_{i=1}^n \cos(\beta_i - \pi/n)} \geq \\ &\geq \frac{\cos^n(\pi/n)}{\cos \left(\left(\sum_{i=1}^n \beta_i - \pi \right) / n \right)} = 1. \end{aligned}$$

Если $\min \alpha_i = \pi/2 - \pi/n$, то противоречие не получится лишь когда все $\beta_i = 2\pi/n$, и все $\alpha_i = \pi/2 - \pi/n$, т.е. все треугольники A_iOA_{i+1} равнобедренные, а это возможно только для правильного n -угольника $A_1A_2 \dots A_n$ при условии, что O — его центр.

226*. (Фейеш-Тот) Обозначим длины перпендикуляров, опущенных на прямые $A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_{n-1}A_n, A_nA_1$ из точки O через $d_1, d_2, \dots, d_{n-1}, d_n$ соответственно, а расстояния до вершин A_i через a_i . Докажите, что

$$d_1 d_2 \dots d_n \leq \cos^n(\pi/n) a_1 a_2 \dots a_n.$$

Указание. Обозначим $\angle A_iOA_{i+1}$ через $2\alpha_i$. Площадь треугольника A_iOA_{i+1} равна $a_i a_{i+1} \sin \alpha_i \cos \alpha_i$. Если бы он был равнобедренным, то его высота равнялась бы $\sqrt{a_i a_{i+1}} \cos^2 \alpha_i$. В силу

задачи 44 отсюда имеем неравенства

$$d_i^2 \leq a_i a_{i+1} \cos^2 \alpha_i,$$

и, следовательно, неравенства

$$2 \log d_i \leq \log a_i + \log a_{i+1} + 2 \log \cos \alpha_i,$$

суммируя которых, и деля пополам, получаем, что

$$\log(d_1 \dots d_n) \leq \log(a_1 \dots a_n) + \log \cos \alpha_1 + \dots + \log \cos \alpha_n.$$

Избавляясь от логарифмов, и применяя неравенство задачи 214, имеем

$$d_1 \dots d_n \leq a_1 \dots a_n \cos^n(\pi/n).$$

Равенство возможно только для правильного n -угольника и его центра. Заметим, что из этого неравенства следует существование такого i , что $d_i/a_i \leq \cos(\pi/n)$, но отсюда следует только, что или $\angle A_i O A_{i+1} \leq \pi/2 - \pi/n$, или $\angle A_i O A_{i+1} \geq \pi/2 + \pi/n$, и поэтому утверждение предыдущей задачи таким простым способом не выводится.

Неравенство Фейеш-Тота означает, что среднее геометрическое расстояний $a_1, \dots, a_n$ больше среднего геометрического расстояний $d_1, \dots, d_n$ не менее, чем в $1/\cos(\pi/n)$ раз. Ленаар, Фоглер и Леуэнбергер независимо доказали гипотезу Фейеш-Тота о том, что среднее арифметическое расстояний $a_1, \dots, a_n$ больше среднего арифметического расстояний $d_1, \dots, d_n$ также не менее, чем в $1/\cos(\pi/n)$ раз, и тоже самое верно для среднего гармонического.

Глава 2

Неравенства для выпуклых многоугольников, фигур и тел

Объяснения тому, отчего одни отношения ведут к гармонии, другие к дисгармонии, однако не сыщешь в арифметике, но в геометрии, особенно в делении круга с помощью правильных многоугольников.

Джон Бэнеилл, «Кеплер», 1981

2.1 Экстремальные свойства выпуклых многоугольников

Следующая теорема, по существу известная в Древней Греции, выражает изопериметрическое свойство правильного n -угольника.

Теорема 10 (Зенодор). Пусть P полупериметр, s — площадь выпуклого n -угольника M . Тогда справедливы неравенства

$$s \leq \frac{P^2 \operatorname{ctg} \frac{\pi}{n}}{n}.$$

Каждое из неравенств точное, и достигается только для правильного n -угольника M . В частности, среди всех n -угольников с данным периметром наибольшую площадь имеет правильный, а среди всех n -угольников с данной площадью наименьший периметр имеет правильный.

Ее косвенное доказательство легко может быть получено с помощью следующих задач.

227. Докажите, что n -угольник с неравными сторонами не может иметь наибольшую площадь среди всех n -угольников данного периметра.

Указание (Р.Мар). Пусть сторона $AB > BC$. Выберем на ней D так, что $BD > BC$ и вместо треугольника CBD приставим к n -угольнику треугольник $CB'D$, равный треугольнику CBD . Получится невыпуклый $n+1$ -угольник, который имеет те же площадь и периметр, что и исходный, но меньшую площадь и больший периметр, чем своя выпуклая оболочка — n -угольник с соседними сторонами $CB', B'A$.

228. Докажите, что n -угольник с равными сторонами, но не равными углами не может иметь наибольшую площадь среди всех n -угольников данного периметра, или, что то же самое, неправильный равносторонний n -угольник не может иметь наибольшую площадь среди всех n -угольников данного периметра.

Указание (Р.Штурм). Пусть в данном n -угольнике угол ABC больше угла BCD . Продолжим AB и CD до пересечения в точке O . Допустим, что она лежит с точками A, D по разные стороны от прямой BC . Отразим треугольник BOC относительно биссектрисы угла при вершине O и получим треугольник $B'OC'$, где C' лежит на отрезке BO , а B' — на стороне CD . Заменяя в данном n -угольнике вершины B, C на вершины B', C' , получаем новый n -угольник той же площади (так как оба они получаются из $n-1$ -угольника с вершинами AOD ... выбрасыванием равных по площади треугольников BOC и $B'OC'$) и периметра, так как

$$AB + BC + CD - AC' + C'B' + B'D = (AB - AC') + (CD - B'D) =$$

$$\begin{aligned}
 &= BC' - CB' = (BO - C'O) - (OB' - OC) = \\
 &= BO - OB' + OC - C'O = 0.
 \end{aligned}$$

Но у полученного n -угольник стороны AC' и $B'D$ не равны, значит согласно задаче 227 он не может иметь максимальную площадь среди всех n -угольников данного периметра.

Если точка O лежит с точками A, D по одну сторону от прямой BC , то получится другой чертеж, для которого, однако, можно провести совершенно такое же рассуждение, если поменять местами стороны OB и OC так, что точки B, C займут места B', C' . И, наконец, возможен случай, когда точки O не существует, так как AB и CD параллельны. Тогда построим к ним перпендикуляры BB', CC' , и проведем опять то же самое рассуждение.

В конце 19-го века немецкий математик Р.Штурм дал прямое доказательство теоремы 10, используя следующие две леммы.

229. (Р.Штурм) Докажите, что n -угольник с неравными сторонами имеет меньшую площадь, чем n -угольник того же периметра с равными сторонами.

Указание. Пусть в данном n -угольнике не все стороны равны. Найдем среди них наибольшую M и наименьшую m . Очевидно они не равны числу a — среднему арифметическому всех сторон. Любые две соседние стороны можно поменять местами так, что ни периметр ни площадь n -угольника не изменятся. Если новый n -угольник не будет выпуклым, его легко превратить в выпуклый, не меняя сторон, и увеличив площадь. Повторяя это преобразование, можно добиться того, что стороны M, m окажутся рядом, периметр не изменится, а площадь не уменьшится. Заменяя стороны M, m на стороны $M + m - a, a$, получим новый n -угольник того же периметра, но, согласно задаче 45, большей площади. Повторяя это преобразование, будем получать n -угольники того же периметра и все большей площади, у которых число сторон, равных a будет возрастать, пока их число не достигнет n , т.е. получится равносторонний n -угольник того же периметра, но большей площади.

❖ 230. (Р. Штурм) Докажите, что неправильный равносторонний n -угольник имеет меньшую площадь, чем правильный n -угольников того же периметра.

Указание. Повторите рассуждения, решающие задачу 228, заменив в них применение задачи 227 на задачу 229.

❖ 231. Докажите, что правильный n -угольник при том же периметре, что и правильный $n+1$ -угольник, имеет меньшую площадь.

Приведенные выше доказательства изопериметрических свойств многоугольников, конечно, не исчерпывают всех возможных доказательств. Приведем, следуя [9], еще одно доказательство того, что среди всех равносторонних $2n$ -угольников наибольшую площадь может иметь только правильный, применяя *четырёхшарнирный метод Штейнера*¹.

Сначала заметим, что можно считать данный $2n$ -угольник симметричным относительно некоторой диагонали AC . Действительно, в противном случае мы можем отразить одну из половин данного $2n$ -угольника относительно диагонали AC , и составить из двух симметричных половин симметричный относительно диагонали AC равносторонний $2n$ -угольник не меньшей площади, чем исходный. Если он не является правильным, то он не вписан в окружность, построенную на диагонали AC , как на диаметре. Пусть B — его вершина, не лежащая на этой окружности, и D — симметричная ей вершина. Вырежем из $2n$ -угольника четырехугольник $ABCD$. После этого от него останется еще 4 куска — многоугольники M_1 со стороной AB , M_2 со стороной BC , M_3 со стороной CD , M_4 со стороной AD . (возможно, некоторые из них вырождаются в треугольники или даже отрезки). Представим стороны четырехугольника $ABCD$ как отрезки, соединенные шарнирами. Сдвинем стороны четырехугольника, не меняя их длину, так, чтобы его углы ABC и ADC стали прямыми. Тогда точки B, D окажутся на окружности с диаметром AC , а прикрепленные к его сторонам многоугольники $M_i, i = 1, \dots, 4$

¹Якоб Штейнер — выдающийся геометр 19-го века. Родился в крестьянской семье в Швейцарии. См. его биографию в [37].

займут новое положение и вместе с новым четырехугольником $A'B'C'D'$ образуют новый равносторонний $2n$ -угольник с той же длиной стороны. Площадь четырехугольника увеличилась, потому что увеличились площади составляющих его треугольников ABC и ADC . Значит, увеличилась и площадь равностороннего $2n$ -угольника.

От ограничения четноугольниками можно, конечно, избавиться.

❖ 232. Докажите, что среди всех равносторонних n -угольников наибольшую площадь может иметь только правильный.

Указание. Если n -угольник неправильный, то он не вписан в окружность, поэтому среди его вершин можно найти четыре, образующих четырехугольник $ABCD$, тоже не вписанный в окружность. Применяя к нему четырехшарнирный метод и задачу 180, можно увеличить площадь данного равностороннего n -угольника, не меняя его стороны.

❖ 233. Докажите, что среди всех равноугольных n -угольников с данным периметром наибольшую площадь имеет правильный.

❖ 234. Докажите, что последовательность $n \sin(\pi/n)$ строго возрастает, а последовательность $n \operatorname{tg}(\pi/n)$ строго убывает. Найдите их пределы.

Указание. Можно применить неравенства

$$2nr \operatorname{tg} \frac{\pi}{n} \leq p \leq 2nR \sin \frac{\pi}{n}.$$

Множество, заметаемое кругом радиуса ϵ («монетой») при движении ее центра по данной кривой линии, называется ϵ -окрестностью этой линии. Аналогично определяется ϵ -окрестность фигуры, ограниченной этой линией.

❖ 235. Найдите периметр и площадь ϵ -окрестности выпуклого многоугольника периметра p и площади s .

Указание. Площадь равна $s + p\epsilon + \pi\epsilon^2$, периметр равен $p + 2\pi\epsilon$.

Предыдущая задача предлагалась на Всесоюзной олимпиаде (на самом деле это классическая формула Штейнера).

236. Среди всех n -угольников данной площади найдите тот, кто имеет минимальную сумму квадратов сторон.

Указание. Ответ: правильный. Если две соседние стороны не равны, то можно их сделать равными так, что площадь не изменится, а сумма квадратов сторон уменьшится. Поэтому минимум достигается только на равностороннем n -угольнике. Далее применить теорему 10.

Но можно применить неравенство Коши

$$n(a_1^2 + \dots + a_n^2) \geq (a_1 + \dots + a_n)^2$$

и опять свести задачу к минимизации периметра при данной площади. Аналогично решаются и следующие задачи.

237. Среди всех n -угольников с данным максимальным вложенным кругом найдите тот, кто имеет минимальную сумму квадратов сторон.

Указание. Ответ: правильный n -угольник.

238. Среди всех n -угольников с данным периметром найдите тот, кто имеет минимальную сумму квадратов сторон.

Указание. Ответ: любой равносторонний n -угольник.

239. Среди всех n -угольников, лежащих в данном круге, найти тот, кто имеет максимальную сумму квадратов сторон.

Указание. При $n = 3$ ответ: правильный треугольник. Для доказательства применить задачу 4. При $n > 3$ максимум не достигим, но существуют n -угольники, у которых сумма квадратов будет сколь угодно близка к сумме квадратов сторон правильного треугольника. Для доказательства верхней оценки

$$a_1^2 + \dots + a_n^2 < 9R^2$$

воспользоваться теоремой Пифагора (или формулой косинусов) и свести ее к случаю $n = 3$.

240. Среди всех n -угольников данного диаметра, найти тот, кто имеет максимальную сумму квадратов сторон.

Указание. При $n = 3$ ответ: правильный треугольник. Неравенство $a^2 + b^2 + c^2 \leq 3d^2$ очевидно. Для получения той же оценки в общем случае применить задачи 239, 26. При $n > 3$ максимум не достижим, но существуют n -угольники, у которых сумма квадратов будет сколь угодно близка к $3d^2$.

241. Среди всех n -угольников данного диаметра, найти тот, кто имеет минимальную сумму квадратов сторон.

Указание. Для треугольника справедливо неравенство

$$a^2 + b^2 + c^2 > 3d^2/2,$$

которое обращается в равенство только в вырожденном случае, поэтому при $n = 3$ минимум не достижим. В общем случае из неравенства Коши и неравенства треугольника следует также недостижимое неравенство

$$a_1^2 + \dots + a_n^2 > d^2 + d^2/(n-1) = nd^2/(n-1).$$

Следующая теорема принадлежит венгерскому математику В. Секефальви-Надю.

Теорема 11 (Секефальви-Надь). Для произвольного выпуклого n -угольника с данными углами $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ для площади s , периметра P и внутреннего радиуса r справедливо неравенство

$$s \leq \frac{1}{f}(P^2 - (P - fr)^2), \quad f = \operatorname{ctg} \frac{\alpha_1}{2} + \dots + \operatorname{ctg} \frac{\alpha_n}{2}.$$

Равенство возможно лишь когда многоугольник описан вокруг окружности. Для произвольного выпуклого многоугольника (и вообще любой выпуклой фигуры) справедливо неравенство

$$s < \frac{1}{\pi}(P^2 - (P - \pi r)^2).$$

242. Выведите теорему Секефальви-Надя из неравенства

$$2Pr - s - fr^2 \geq 0.$$

243**. Докажите неравенство $2Pr - s - f r^2 \geq 0$.

Указание. Сдвинем все стороны n -угольника внутрь на одинаковое расстояние $\epsilon \leq r$. Многоугольник, ограниченный полученными прямыми, обозначим M_ϵ и назовем *внутренней оболочкой*. Посмотрим как меняется площадь и периметр этой оболочки с ростом ϵ . Для малых значений ϵ вершины M_ϵ двигаются по биссектрисам внутренних углов многоугольника, площадь, периметр и внутренний радиус при этом будут вычисляться по формулам

$$\begin{aligned}s(M) &= s(M_\epsilon) + 2P(M_\epsilon)\epsilon + f\epsilon^2, \\ P(M) &= P(M_\epsilon) + f\epsilon, \quad r(M) = r(M_\epsilon) + \epsilon,\end{aligned}$$

откуда

$$\begin{aligned}2P(M)r(M) - s(M) - f(r(M))^2 &= \\ &= 2P(M_\epsilon)r(M_\epsilon) - s(M_\epsilon) - f(r(M_\epsilon))^2.\end{aligned}$$

Однако стороны при этом будут уменьшаться и в какой-то момент одна (или несколько из них) исчезнут (их длины станут нулевыми). При дальнейшем увеличении ϵ будет происходить то же самое, но число вершин у внутренней оболочки будет меньше. Функция $2P(M_\epsilon)r(M_\epsilon) - s(M_\epsilon) - f(r(M_\epsilon))^2$ остается постоянной, пока не меняется число вершин у оболочки; когда число вершин уменьшается, эта функция скачкообразно уменьшается. При $\epsilon = r$ оболочка стягивается в точку или отрезок (в зависимости от вида исходного многоугольника M). При этом указанная функция становится равной нулю. Значит,

$$2P(M)r(M) - s(M) - f(r(M))^2 \geq 0.$$

244. Выведите из теоремы Секефальви-Надя следующую теорему.

Теорема 12 (Люилье). Среди всех выпуклых n -угольников с данным периметром и данными направлениями сторон наибольшую площадь имеет описанный вокруг окружности.

245. Выведите из теоремы Люилье теорему Зенодора.

2.2 Экстремальные точки в выпуклых многоугольниках

Расстояния до сторон

❖ 246. Найти внутри выпуклого n -угольника точку, для которой максимальное расстояние до его сторон минимально.

Указание. Эта точка — центр максимального круга, который можно поместить в данный n -угольник. Его радиус в разделе 1.2 обозначался r .

Вообще говоря, эта точка определена не однозначно.

❖ 247. Найти внутри прямоугольника и трапеции все точки, для которых максимальное расстояние до всех сторон минимально.

❖ 248. Многоугольник является описанным тогда и только тогда, когда биссектрисы всех его углов пересекаются в одной точке. Правильный n -угольник является описанным.

❖ 249. В выпуклом многоугольнике из любой точки можно опустить перпендикуляр на одну из сторон так, что он упадет на сторону, а не ее продолжение.

Указание. Опустим перпендикуляры на все стороны и выберем из них наименьший. Если он падает на продолжение соответствующей стороны, то он пересекает другую сторону. Тогда перпендикуляр, опущенный на нее, будет короче, что невозможно.

Есть «механический» вариант этого решения. Сделаем «колесо» в виде этого многоугольника так, чтобы его центр масс совпал с данной точкой. Если все перпендикуляры из нее падают на продолжения «своих» сторон, то положение этого колеса неустойчиво, оно опрокинется на другую сторону, потом еще на другую и покатится и будет бесконечно долго катиться, что невозможно (т.к. невозможен вечный двигатель). На самом деле колесо может покатиться, но остановится в том положении, когда центр масс займет самое низкое положение (будет проек-

тироваться на ближайшую к нему сторону) — это требует один из принципов механики.

❶250. Найти в выпуклом n -угольнике точку, для которой сумма расстояний до его сторон минимальна.

Указание. Указанная сумма расстояний является линейной функцией от координат точки. Максимум и минимум этой функции достигаются в вершинах n -угольника.

❶251. Для выпуклого равностороннего n -угольника сумма расстояний до его сторон одинакова для всех его точек.

Указание. Если расстояния до сторон равны h_i , то

$$a(h_1 + \dots + h_n) = 2S,$$

где a — сторона, S — площадь.

Точка Люиле

❶252. Найти внутри выпуклого n -угольника точку, для которой сумма квадратов расстояний до его сторон минимальна.

Указание. Ввести координаты и задать прямые, ограничивающие многоугольник, линейными уравнениями. Вычислить расстояния от точки до этих прямых. Функция, равная сумме квадратов расстояний, является функцией вида $ax^2 + by^2 + 2cxy + dx + ey$ (квадратичной функцией) так как квадрат каждого расстояния имеет такой вид. Так как она всюду положительна, то ее можно представить в виде $(Ax + By)^2 + (Cy + D)^2 + E$. Очевидно, что минимум получается при решении системы уравнений $Ax + By = Cy + D = 0$. Минимум достигается только внутри n -угольника (если точка вне его и достаточно далеко от него, то ее можно так сдвинуть, что все расстояния уменьшатся, поэтому множество минимальных точек не может совпадать с прямой линией). Можно также заметить, что рассматриваемая функция строго вогнута как сумма нескольких нестрого вогнутых функций, которые вырождаются в линейные функции на несовпадающих прямых.

253. Точка, расстояния от которой до сторон n -угольника пропорциональны этим сторонам (если такая существует) имеет минимальную сумму квадратов расстояний до сторон.

Указание. Если расстояния от данной точки до сторон a_i равны x_i , то $a_1x_1 + \dots + a_nx_n = 2S$, где S — площадь n -угольника. Из неравенства Коши следует, что

$$(a_1^2 + \dots + a_n^2)(x_1^2 + \dots + x_n^2) \geq (a_1x_1 + \dots + a_nx_n)^2 = 4S^2,$$

откуда $x_1^2 + \dots + x_n^2 \geq 4S^2/(a_1^2 + \dots + a_n^2)$, причем равенство возможно только когда x_i/a_i все равны. Указанное неравенство верно при любых знаках x_i (если точка лежит вне n -угольника, то расстояния до некоторых сторон надо выбирать с отрицательным знаком, при этом все равно $a_1x_1 + \dots + a_nx_n = 2S$), но если указанная точка существует, то она лежит внутри n -угольника.

254. Точка, расстояния от которой до сторон n -угольника пропорциональны этим сторонам, совпадает с точкой пересечения симедиан его углов. Симедиана угла $\angle ABC$ — это симедиана треугольника ABC , проведенная из B . По определению все ее точки удовлетворяют условию: расстояния от них до сторон угла пропорциональны этим сторонам AB и BC . Если симедианы не пересекаются в одной точке, то указанной точки (обобщения точки Лемуана для треугольников) не существует (но минимум суммы квадратов расстояний все равно достигается в некоторой точке).

Указание. См. задачу 66.

Расстояния до вершин

255. Найти внутри выпуклого n -угольника точку, для которой максимальное расстояние до его вершин минимально. Докажите, что эта точка определена однозначно.

Указание. Эта точка — центр максимального круга, который содержит данный n -угольник. Его радиус в разделе 1.2 обозначался R . Применить задачу 26.

256. Многоугольник является вписанным тогда и только тогда, когда срединные перпендикуляры всех его сторон пересекаются в одной точке. Правильный n -угольник является вписанным. Для вписанного многоугольника величина R совпадает с радиусом описанного вокруг него круга.

Обобщения точки Торичелли

257. Докажите, что сумма расстояний от точки внутри треугольника до его вершин заключена между его полупериметром и периметром.

Указание. Сумма расстояний — строго вогнутая функция. Согласно задаче 215 она достигает максимума в одной из его вершин. Нижняя оценка следует из неравенства треугольника. Обе оценки в пределе достижимы.

258. Докажите, что сумма расстояний от точки внутри тетраэдра до его вершин заключена между его третью периметра и периметром.

Указание. Рассуждать аналогично задаче 257. Обе оценки в пределе достижимы. Решение, не использующее выпуклость см. в [53], задача 15.10.

Задача о минимальной сумме расстояний до данных точек в общем случае довольно трудна.

259**. Как найти точку, сумма расстояний от которой до всех данных точек P_i минимальна?

Указание. Сумма расстояний $f(X)$ — вогнутая функция. Минимум она имеет в единственной точке M . Если $M \neq P_i$, и точка M передвинута в позицию M' , такую что вектор $\delta = MM'$ бесконечно мал, то $f(M') - f(M) > 0$, а с другой стороны $(f(M') - f(M))/(\delta, r_1 + \dots + r_n) \rightarrow 1$ при $|\delta| \rightarrow 0$, где вектора r_i — вектора единичной длины, направленные из M в P_i , а знак (u, v) обозначает скалярное произведение векторов. Поэтому $r_1 + \dots + r_n = 0$, иначе бы при δ коллинеарным с $r_1 + \dots + r_n = 0$ и направленным в противоположную сторону

получилось бы, что $f(M') - f(M) < 0$. Обратно, если для точки M выполнено условие $r_1 + \dots + r_n = 0$, то в этой точке $f(X)$ имеет локальный экстремум. Для точки $M = P_i$ условие локального экстремума таково: $|r_1 + \dots + r_{i-1} + r_{i+1} + \dots + r_n| \leq 1$. Из этих условий следует, что минимум может быть только внутри выпуклой оболочки данных точек. Чтобы его найти, надо сравнить $f(P_i)$ друг с другом и с точкой M , для которой $r_1 + \dots + r_n = 0$. Подробности можно найти в [1], задача 19.

☞ 260. Докажите, что для произвольного треугольника минимум суммы расстояний достигается либо в вершине, с углом большим или равным 120 градусов, или в точке, из которой все его стороны видны под углом 120 градусов (точке Торичелли).

Указание. Применить задачу 259.

☞ 261. Докажите, что для выпуклого четырехугольника минимум суммы расстояний достигается в точке пересечения диагоналей.

Указание. Можно применить задачу 259, но все очевидно и без нее (см. задачу 187).

☞ 262. Если диагонали у выпуклого $2n$ -угольника пересекаются в одной точке, то для нее достигается минимум суммы расстояний до всех вершин.

Указание. Можно применить задачу 259, но все очевидно и без нее. Выпуклость тоже не нужна.

Следующая задача для случай семиугольника предлагалась на Московской олимпиаде в 1984 г.

☞ 263. У правильного нечетноугольника минимум суммы расстояний достигается в его центре.

Указание. Можно применить задачу 259, но можно обойтись и без нее. Например, описать вокруг n -угольника другой правильный n -угольник так, чтобы он был описан вокруг описанного круга меньшего n -угольника. Сумма расстояний от любой точки до сторон большего n -угольника постоянна. Сумма расстояний от нее же до вершин меньшего n -угольника в силу

свойств перпендикуляра и наклонной будет больше или равна сумме расстояний до сторон большего n -угольника.

❖ 264. Докажите, что для невыпуклого четырехугольника минимум суммы расстояний достигается в одной из трех вершин его выпуклой оболочки.

Указание. Можно применить задачу 259.

❖ 265*. Найти точку, для которой достигается минимум суммы расстояний до данных пяти точек, четыре из которых образуют квадрат, а пятая лежит вне его на его оси симметрии.

Указание. Примем сторону квадрата, равной двум. Точка минимума находится на оси симметрии внутри квадрата ближе к пятой точке. Обозначим ее расстояние от центра квадрата через x . Рассмотрим вектора единичной длины, направленные из нее в пять данных точек. Сумма этих векторов должна равняться нулю. Вычислим координаты этих векторов:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{-1}{\sqrt{1+(1+x)^2}}, \frac{-1-x}{\sqrt{1+(1+x)^2}} \right), \\ & \left(\frac{1}{\sqrt{1+(1+x)^2}}, \frac{-1-x}{\sqrt{1+(1+x)^2}} \right), \\ & \left(\frac{-1}{\sqrt{1+(1-x)^2}}, \frac{1-x}{\sqrt{1+(1-x)^2}} \right), \\ & \left(\frac{1}{\sqrt{1+(1-x)^2}}, \frac{1-x}{\sqrt{1+(1-x)^2}} \right), \quad (0, 1). \end{aligned}$$

Приравнявая к нулю координаты суммы этих векторов, получаем уравнение:

$$\frac{1+x}{\sqrt{1+(1+x)^2}} - \frac{1-x}{\sqrt{1+(1-x)^2}} = 1/2.$$

Избавляясь от радикалов, получаем уравнение

$$15x^8 - 16x^6 + 88x^4 - 320x^2 + 112 = 0.$$

Докажем, что его корни нельзя выразить с помощью арифметических операций и квадратных радикалов из рациональных чисел. Это означает, что искомую точку нельзя построить циркулем и линейкой. Очевидно, что достаточно это доказать для уравнения

$$15x^4 - 16x^3 + 88x^2 - 320x + 112 = 0.$$

Разложим его на квадратные множители. Выделим полный квадрат

$$15 \left(x^2 - \frac{8}{15}x + a \right)^2 + \left(83\frac{11}{15} - 30a \right) x^2 + (16a - 320)x + 112 - 15a^2.$$

Подберем a так, чтобы второе слагаемое оказалось полным квадратом. Для этого обратим в нуль дискриминант и получим (избавляясь от дробей) уравнение

$$3375a^3 - 9900a^2 - 60000a - 121664 = 0.$$

Так как при $a = 6$ левая часть отрицательна, а при $a = 7$ она положительна (так как куб больше квадрата), то уравнение имеет корень $6 < a < 7$. Других корней у него нет, так как иначе многочлен $3375a^3 - 9900a^2 - 60000a - 121664$ был бы больше нуля в точке $a = 4(11 - \sqrt{871})/45$, которая является меньшим корнем его производной

$$10125x^2 - 19800x - 60000 = 25(405x^2 - 792x - 2400).$$

Проверим, что данный кубический многочлен не имеет рациональных корней. Пусть p/q — такой корень, p, q взаимно просты. Тогда $3375p^3 - 9900p^2q - 60000pq^2 - 121664q^3 = 0$, откуда следует, что p делит 121664, q делит 3375, $121664q^3$ делится на 75, значит q делится на 15, $3375p^3$ делится на 4, значит p четно, и даже делится на 4, потому что иначе $3375p^3$ не делилось бы на 16, а оно делится, так как каждое из чисел $9900p^2q$, $60000pq^2$, $121664q^3$ кратно 16. Поэтому $p/q = 4 \cdot 2^n \cdot 1901^m / (15 \cdot 3^k 5^l)$, $0 \leq n \leq 4$, $0 \leq m \leq 1$, $0 \leq k, l \leq 2$. Из возможных $5 \cdot 2 \cdot 3^2 = 90$ комбинаций надо проверить только те, для которых $6 < p/q < 7$.

Для $m = 0$ таких нет так как $64/15 < 6$. При $m = 1$ минимальное значение $p/q = 4 \cdot 1901/3375 < 3$, следующее по величине $p/q = 8 \cdot 1901/3375 < 6$, следующее $p/q = 4 \cdot 1901/1125 \in (6, 7)$, а все остальные больше 7. Поэтому остается проверить, будет ли корнем число $4 \cdot 1901/1125 = 7604/1125 > 6,75 = 6 + \frac{3}{4}$. Так как значение данного многочлена в точке 6,75 положительно, а в точке 6 отрицательно, то корень должен быть меньше 6,75, значит не равен $7604/1125$.

Известна теорема: если кубическое уравнение с целыми коэффициентами не имеет рациональных корней, то его корни не могут быть построены циркулем и линейкой (см., например [24, 38]).

Подставляя упомянутый выше корень a в уравнение в формулу

$$15 \left(x^2 - \frac{8}{15}x + a \right)^2 + \left(83\frac{11}{15} - 30a \right) x^2 + (16a - 320)x + 112 - 15a^2,$$

и сокращая на 15, получаем при некоторых c, d , выражимых из a с помощью арифметических операций и извлечения квадратного корня, разложение

$$\begin{aligned} & \left(x^2 - \frac{8}{15}x + a \right)^2 - (cx + d)^2 = \\ & = \left(x^2 - \left(c + \frac{8}{15} \right) x + a - d \right) \left(x^2 - \left(\frac{8}{15} - c \right) x + a + d \right). \end{aligned}$$

Обратно, через a может быть выражено a с помощью только арифметических операций. Поэтому c и d нельзя выразить из рациональных чисел с помощью арифметических операций и извлечения квадратного корня, так как если бы это было возможно, то и a можно было бы построить циркулем и линейкой.

Значит, корнями исходного уравнения являются корни двух квадратных трехчленов, коэффициенты которых нельзя построить циркулем и линейкой. Можно проверить, что действительных из них только два, которые являются корнями одного из этих трехчленов. Если оба корня квадратного трехчлена можно построить циркулем и линейкой, то в силу теоремы Виета

и его коэффициенты можно построить, что в рассматриваемом случае неверно. Остается показать, что если один корень квадратного трехчлена можно построить, то и второй тоже. Далее указан только эскиз доказательства².

Пусть корень α трехчлена $x^2 + px + q$ можно построить. Значит, α получается из рациональных чисел путем последовательности арифметических операций и операций извлечения корня. Например, $\alpha = p_1 + q_1\sqrt{r_1}$, где числа p_1, q_1, r_1 построены ранее, и формулы для них содержат меньшее число корней. Тогда $\beta = p_1 - q_1\sqrt{r_1}$ тоже можно построить и оба они являются корнями трехчлена $x^2 - 2p_1x + p_1^2 - q_1^2r_1$ с коэффициентами, которые можно построить. Значит эти коэффициенты можно представить в виде $s_i = p_i + q_i\sqrt{r_i}$, $i = 2, 3$, где p_i можно построить. Но тогда и $d_i = p_i - q_i\sqrt{r_i}$, $i = 2, 3$ тоже можно построить. Рассмотрим многочлен

$$\begin{aligned} & (x^2 + s_1x + s_2)(x^2 + d_1x + d_2) = \\ & = x^4 + (s_1 + d_1)x^3 + (s_1d_1 + s_2 + d_2)x^2 + (s_2 + d_2)x + s_2d_2. \end{aligned}$$

его коэффициенты выражаются через p_i, q_i, r_i без операции извлечения корня и их поэтому тоже можно построить. Число α является корнем этого многочлена. Продолжая подобные рассуждения, получим в конце концов многочлен с рациональными коэффициентами степени 2^n , корнем которого будет α . При этом все действительные корни этого многочлена также можно построить циркулем и линейкой.

Но α является корнем также многочлена $15x^4 - 16x^3 + 88x^2 - 320x + 112$, не имеющего рациональных корней (это можно поверить подобно тому, как выше проверялось отсутствие рациональных корней у кубического многочлена). Можно считать, что этот многочлен является многочленом минимальной степени с рациональными коэффициентами, корнем которого является α . Тогда упомянутый многочлен степени 2^n будет делиться нацело на этот многочлен, потому что в противном случае остаток

²Фактически доказывается известный критерий, с помощью которого определяется, можно ли построить циркулем и линейкой корни уравнения четвертой степени. См., например, [4], хотя там нет полного доказательства. Доказательство можно извлечь из [50], но там нет явной формулировки.

будет многочленом меньшей степени с рациональными коэффициентами и корнем α . Значит все его корни можно построить циркулем и линейкой, что и требовалось доказать. Если же многочлен $15x^4 - 16x^3 + 88x^2 - 320x + 112$ не является минимальным для корня α , то аналогичные рассуждения показывают, что минимальным тогда будет квадратный трехчлен с рациональными коэффициентами, делящий указанный многочлен. Тогда этот многочлен разложим на два трехчлена с рациональными коэффициентами и все корни указанного многочлена можно построить циркулем и линейкой, откуда следует, что рассмотренный выше трехчлен с этими корнями имеет коэффициенты, которые тоже можно построить, а это противоречит доказанному выше.

❖ 266*. Для выпуклого выпуклого n -угольника со сторонами a_i найти точку внутри него, для которой минимальна сумма $a_1/d_1 + \dots + a_n/d_n$, где d_i — расстояние от нее до стороны a_i .

Указание. Если многоугольник описанный и r — радиус вписанного круга, то минимум достигается в его центре. Действительно, $d_1 a_1 + \dots + d_n a_n = 2s$, где s — площадь n -угольника, то согласно неравенству Коши

$$2s(a_1/d_1 + \dots + a_n/d_n) = (a_1/d_1 + \dots + a_n/d_n)(d_1 a_1 + \dots + d_n a_n) \geq (\sqrt{a_1/d_1} \sqrt{a_1 d_1} + \dots + \sqrt{a_n/d_n} \sqrt{a_n d_n})^2 = (a_1 + \dots + a_n)^2 = p^2,$$

откуда

$$a_1/d_1 + \dots + a_n/d_n \geq p^2/2s.$$

Равенство достигается только когда вектора с компонентами $(\sqrt{a_i/d_i})$ и $(\sqrt{a_i d_i})$ пропорциональны, т.е. когда $\lambda \sqrt{a_i/d_i} = \sqrt{a_i d_i}$, т.е. $d_i = \lambda$, т.е. все d_i равны. Отсюда следует, что $d_i = r$ и n -угольник описанный. В случае $n = 3$ получаем решение задачи 64.

В общем случае задача, видимо трудна. Можно заметить, что функция $f(X) = a_1/d_1(X) + \dots + a_n/d_n(X)$ строго вогнута (как сумма вогнутых функций в силу вогнутости гиперболы $y = 1/x$), при приближении к границе многоугольника стремится к бесконечности, и достигает минимума внутри многоугольника в единственной точке. Если многоугольник имеет ось симметрии, то

эта точка лежит на ней. Если он имеет хотя бы две оси симметрии, то эта точка совпадает с точкой их пересечения. Если многоугольник имеет центр симметрии, то она совпадает с ним.

Экстремальные точки в выпуклых многогранниках

Некоторые из рассмотренных задачи можно перенести и на пространственный случай без особых изменений в доказательствах. Приведем несколько формулировок.

❖ 267. Пусть в тетраэдре есть точка, из которой все его ребра видны под равными углами. Докажите, что эти углы имеют косинус, равный $-1/3$ и на этой точке достигается минимум суммы расстояний до всех его вершин.

Указание. Применить задачи 259, 586. См. также задачи 435, 585.

❖ 268. (IMO 1966) В правильном тетраэдре минимум суммы расстояний до его вершин достигается в его центре.

Указание. Все следует из задачи 267. Но можно также описать вокруг тетраэдра тоже правильный тетраэдр с гранями, параллельными граням меньшего тетраэдра, заметить что сумма расстояний от любой точки до его граней постоянна и тем, что сумма расстояний от нее же до вершин меньшего тетраэдра в силу свойств перпендикуляра и наклонной будет больше или равна сумме расстояний до граней большего тетраэдра.

❖ 269. Пусть в тетраэдре есть точка, из которой два скрещивающихся ребра видны под равными углами, и биссектрисы этих углов лежат на одной прямой. Докажите, что на этой точке достигается минимум суммы расстояний до всех его вершин.

Указание. Применить задачу 259.

❖ 270*. (Люилье) Найти внутри данного тетраэдра точку, сумма квадратов расстояний от которой до его граней минимальна.

Указание. Это точка, расстояния от которой до граней пропорциональны их площадям (точка Люилье). Чтобы ее найти,

нужно через каждое ребро тетраэдра провести плоскость, такую, что расстояния от ее точек до граней, содержащих это ребро, относятся друг к другу как площади этих граней. Пересечение этих плоскостей дает искомую точку. В случае равногранного тетраэдра (и в частности, правильного), эта точка совпадает с центром вписанного шара (центром правильного тетраэдра). О равногранных тетраэдрах см. задачу 541 и следующие.

О точке Люиле тетраэдра см. также задачу 555.

❖ 271*. Найти внутри выпуклого n -гранника точку, для которой сумма квадратов расстояний до его граней минимальна.

Указание. См. указание к задаче 252.

❖ 272*. Для выпуклого выпуклого n -гранника с гранями площади a_i найти точку внутри него, для которой минимальна сумма $a_1/d_1 + \dots + a_n/d_n$, где d_i — расстояние от нее до грани a_i .

Указание. Если многогранник описанный и r — радиус вписанного круга, то минимум достигается в его центре. Также как и задаче 266 можно доказать неравенство

$$a_1/d_1 + \dots + a_n/d_n \geq s^2/3v,$$

где v — объем многогранника и s — площадь его поверхности. В доказательстве используется формула $d_1 a_1 + \dots + d_n a_n = 3v$.

В частности, если многогранник есть тетраэдр, то минимум достигается в центре вписанной в него сферы (см. задачу 550). В общем случае задача, видимо, трудна.

Взвешенные суммы расстояний

Можно также обобщить задачу о минимуме суммы расстояний, рассмотрев минимум суммы расстояний, умноженных на заданные положительные коэффициенты m_i .

Например, можно рассмотреть задачу из [76].

❖ 273. Найти в треугольнике ABC точку M , для которой

$$m_1|AM| + m_2|BM| + m_3|CM|$$

минимальна.

Указание. Построим треугольник с длинами сторон m_i (рассматриваем случай, когда это возможно). Пусть его внешние углы α_i . Проводя из одной точки отрезки длины m_i , попарно образующие между собой углы α_i , получаем три вектора, сумма которых равна нулю. Найдем в треугольнике ABC точку, из которой его стороны видны под углами α_i , тогда вектора, направленные из нее в вершины треугольника с соответствующими длинами m_i будут в сумме равны нулю. Это и есть искомая точка.

Если же треугольник с длинами сторон m_i не существует, то искомая точка совпадает с одной из вершин A, B, C .

274. (Москва, 1986) Найти в треугольнике ABC точку M , для которой $|AM| + 2|BM| + 3|CM|$ минимальна.

Указание. Применить неравенство треугольника.

В [76] приведена красивая механическая интерпретация этой задачи. Представим себе, что данные точки P_i лежат на столе. Прodelаем в нем дырки в этих точках, возьмем веревки достаточно большой равной длины l , свяжем их концы в узел и пропустим свободные концы в дырки, оставим узел на поверхности стола. Привяжем к концам веревок грузы с массами m_i . Тогда узел переместится в точку, которая и будет иметь минимальную сумму. Дело в том, что согласно принципам механики, такая система должна прийти в состояние, в котором ее центр масс (т.е. центр масс всех грузов m_i) должен занять самое низкое возможное положение. Но высота центра масс этих грузов (относительно уровня стола) равна

$$-\frac{\sum_i m_i h_i}{\sum_i m_i}$$

и она будет минимальной, когда

$$\sum_i m_i h_i = \sum_i m_i (l - r_i) = l \sum_i m_i - \sum_i m_i r_i$$

максимальна, т.е. когда $\sum_i m_i r_i$ минимальна, где $r_i = l - h_i$ — расстояния от узла до точек P_i .

Суммы квадратов расстояний

Задача о минимизации суммы квадратов расстояний сравнительно проста.

❶ 275. (Лейбниц) Докажите, что $\sum_i m_i r_i^2$ — взвешенная сумма квадратов расстояний от произвольной точки M до данных точек P_i минимальна только в точке M , такой что сумма векторов MP_i , умноженных на m_i , равна нулю. Эта точка совпадает с центром масс m_i , помещенных в точки P_i . Если взять за начало координат любую точку O и обозначит вектора OP_i как e_i , то центр масс будет в конце вектора $\frac{1}{\sum_i m_i} \sum_i m_i e_i$ с началом в начале координат.

Указание. Применить следующую формулу Лейбница для момента инерции системы точек:

$$m_1 r_1^2 + \dots + m_n r_n^2 = m_1 (r_1 - r)^2 + \dots + m_n (r_n - r)^2 + (m_1 + \dots + m_n) r^2,$$

где $r = \frac{1}{\sum_i m_i} \sum_i m_i r_i$ — центр масс этой системы. Для доказательства заметим, что

$$\begin{aligned} & m_1 (r_1 - r)^2 + \dots + m_n (r_n - r)^2 = \\ &= m_1 r_1^2 + \dots + m_n r_n^2 + (m_1 + \dots + m_n) r^2 - 2(m_1 r_1 + \dots + m_n r_n, r), \end{aligned}$$

а $(m_1 r_1 + \dots + m_n r_n, r) = (m_1 + \dots + m_n) r^2$.

Утверждение Лейбница справедливо и в пространственном случае.

❶ 276. Найти минимум суммы квадратов расстояний от произвольной точки до вершин данного а) треугольника б) четырехугольника в) тетраэдра.

Указание. Центр трех единичных масс расположен в точке пересечения медиан треугольника, центр четырех единичных масс расположен в точке пересечения отрезков, соединяющих середины противоположных сторон. В случае тетраэдра отрезки, соединяющие середины противоположных ребер, называются бимедианами и пересекаются в одной точке. Эта точка (центр масс вершин тетраэдра) также совпадает с точкой пересечения пространственных медиан тетраэдра (см. далее задачи 539, 547).

Вписанные многоугольники

Рассмотрим задачу о том, как вписать в данный выпуклый n -угольник другой m -угольник, $m \leq n$, у которого сумма сторон минимальна (обобщение задачи Фаньяно), и подобные ей задачи о минимизации суммы квадратов сторон и максимальной стороны вписанных n -угольников (для случая треугольников эти задачи см. в разделе 1.3).

❶ 277. Докажите, что ромб с вершинами в серединах сторон прямоугольника имеет минимальный периметр среди всех вписанных в прямоугольник четырехугольников. Кроме него, существует еще бесконечно много вписанных в квадрат параллелограммов того же минимального периметра. Ромб также имеет минимальную сумму квадратов сторон и минимальную наибольшую сторону среди всех вписанных четырехугольников, причем он является единственным экстремальным четырехугольником.

Указание. См. задачи 280, 290.

❶ 278*. (Биркгоф) Любой вписанный n -угольник с минимальным периметром (если он существует и не вырождается, т.е. все его вершины лежат внутри сторон описанного n -угольника) является «оптическим», т.е. для любой его вершины углы, образованные смежными с ней сторонами вписанного n -угольника со стороной описанного n -угольника, содержащей эту вершину, равны. Значит, вписанный n -угольник можно рассматривать как замкнутую траекторию луча света, отражающегося зеркально от сторон описанного n -угольника (или как замкнутый путь шара в n -угольном бильярде). То же самое верно и для вписанного m -угольника при $m < n$ и для вырожденных m -угольников, но только для вершин, лежащих внутри сторон n -угольника.

Указание. Применить задачу 49.

❶ 279. Если у n -угольника при четном n существует невырожденный вписанный n -угольник с минимальным периметром, то сумма всех его углов при вершинах с четными номерами равна сумме углов при вершинах с нечетными номерами. В этом

случае существует бесконечно много минимальных вписанных n -угольников.

Указание. Передвинуть на достаточно малую величину одну из вершин вписанного n -угольника и через нее запустить луч света, параллельно одной из смежных с этой вершиной сторон. После отражения от всех сторон луч вернется в исходную точку и его траектория образует вписанный n -угольник со сторонами, параллельными соответствующим сторонам исходного n -угольника. Если его стороны занумеровать в естественном порядке, то сумма длин сторон с четными номерами увеличится (уменьшится) на ту же величину, на которую уменьшится (увеличится) сумма длин сторон с нечетными номерами.

☞ 280. У четырехугольника существует невырожденный вписанный четырехугольник с минимальным периметром тогда и только тогда, когда он является описанным. В этом случае существует бесконечно много минимальных вписанных четырехугольников.

Указание. Частный случай задачи 279. Еще одно решение (предложенное Шварцем) можно получить, если развернуть стороны вписанного четырехугольника с одной фиксированной вершиной в четырехзвенную ломаную с фиксированными концами (для этого надо последовательно симметрично отражать большой четырехугольник от его сторон четыре раза) и заметить, что ломаная имеет минимальную длину, когда вырождается в отрезок прямой. Длины этих отрезков не зависят от выбора фиксированной вершины вписанного четырехугольника. Подобное рассуждение можно провести и для любого n -угольника, но ломаная не всегда сможет превратиться в отрезок прямой (это не получится, например, у тупоугольного треугольника). Подробности см. в [38, 59].

☞ 281. Если у n -угольника при нечетном n существует невырожденный вписанный n -угольник с минимальным периметром, то он определен однозначно.

Указание. У вписанного оптического n -угольника направления сторон при нечетном n определяются однозначно, как и углы, образованные ими со сторонами большого n -угольника.

☉ 282*. Для n -угольника с радиусом описанной вокруг него окружности R , центр которой лежит внутри него, и площадью S периметр вписанного в него n -угольника не меньше $2S/R$. Равенство достигается для вписанного n -угольника, стороны которого перпендикулярны отрезкам, соединяющим центр описанной окружности с вершинами вписанного в нее n -угольника.

Указание. Соединим центр описанной окружности с вершинами вписанного n -угольника. Большой n -угольник разобьется на непересекающиеся четырехугольники. Их диагоналями являются стороны a_i вписанного n -угольника и отрезки длины R , соединяющим центр описанной окружности с вершинами вписанного в нее n -угольника. Площадь каждого четырехугольника оценивается сверху как $Ra_i/2$, причем равенство возможно лишь когда его диагонали перпендикулярны. Складывая эти оценки, имеем $pR/2 = (a_1 + \dots + a_n)R/2 \geq S$. Равенство достижимо лишь для вписанного n -угольника, стороны которого перпендикулярны отрезкам, соединяющим центр описанной окружности с вершинами вписанного в нее n -угольника. Этот n -угольник существует, определяется однозначно и является «оптическим». Для остроугольного треугольника получаем доказательство теоремы Фаньяно, предложенное Н. А. Извольским [33].

☉ 283. Для тупоугольного (и прямоугольного) треугольника минимум периметров вписанных треугольников никогда не достигается.

Указание. Полупериметр вписанного треугольника может быть сколь угодно близок к минимальной высоте (т.е. ширине) треугольника.

Для тупоугольного треугольного билиярда периодические траектории в общем случае, видимо, неизвестны.

☉ 284. Найдите периодическую траекторию для билиярда в форме прямоугольного треугольника.

☉285. Для выпуклого n -угольника при $n \geq 4$ минимум периметров вписанных треугольников со сторонами, не лежащими на его сторонах, никогда не достигается.

☉286*. Для ромба периметр вписанного в него четырехугольника больше удвоенной минимальной диагонали и может быть сколь угодно близок к ней.

Указание. Минимальный периметр достигается у четырехугольника, который вырождается в треугольник с вершиной в вершине данного ромба, либо вырождается в минимальную диагональ. Рассмотрим первый случай, пусть $ABCD$ — ромб, BEF — треугольник с минимальным периметром, E лежит на AD , F — на CD . Пусть $\angle DEF = \alpha$, $\angle EFD = \beta$, $\angle A = \gamma$. Так как $\triangle BEF$ — оптический, то $\angle AEB = \alpha$, $\angle CFB = \beta$. Применяя задачу 146, получаем, что $\alpha = \beta$ (откуда следует, что $\triangle BEF$ — равнобедренный и его ось симметрии совпадает с диагональю BD). Из свойств углов углов треугольника и параллелограмма имеем $\gamma = \alpha + \beta = 2\alpha$,

$$3\alpha = \gamma + \alpha < \pi < \gamma + \alpha + \pi/2 - \alpha = \gamma + \pi/2,$$

откуда $\pi/2 < \gamma < 2\pi/3$, значит оптический треугольник BEF существует только, если BD — большая диагональ (из доказанного следует, что если BD — меньшая диагональ, то минимум периметра $\triangle BEF$ достигается, когда он вырождается в эту диагональ). В силу равенства $\angle AEF = \angle ACB$ четырехугольник $AECB$ — вписанный в окружность. Ее хорда AC стягивает дугу величины $2\pi - 2\gamma$, и хорда EB стягивает дугу той же величины, значит $EB = AC$ (и для построения оптического треугольника BEF достаточно пересечь AD окружностью радиуса AC с центром B), откуда видно, что периметр $\triangle BEF$ больше $2|AC|$.

Для произвольного четырехугольника неравенство задачи 286 неверно. Например, четырехугольник с углами 60, 75, 75, 150 градусов имеет равные диагонали и две равные им стороны (его диаметр тоже им равен, конечно). Впишем в него правильный треугольник с вершиной в угле 150 градусов (остальные вершины лежат на противоположных сторонах, равных по длине диа-

гоналям). Периметр треугольника равен $\sqrt{3}$, умноженному на диаметр четырехугольника. «Раздвоив» вершину треугольника, совпадающую с вершиной угла 150 градусов, и сдвинув каждый экземпляр вдоль своей стороны, превратим вписанный треугольник во вписанный четырехугольник. Если эти сдвиги были достаточно малыми, то периметр полученного четырехугольника будет близок к периметру треугольника, т.е. меньше удвоенного диаметра.

❧ 287*. Докажите, что среди всех вписанных в этот четырехугольник треугольников, указанный правильный треугольник имеет а) минимальный периметр б) минимальную сумму квадратов сторон в) минимум максимальной стороны.

Указание. Пункты б) и в) следуют из пункта а). Применяя задачу 278, доказать, что если вершин треугольника совпадает с вершинами с углами 60, 75, 75 градусов, то минимальный периметр, равный удвоенной диагонали, будет у вырожденного треугольника. Если же вершина совпадает с вершиной угла 150 градусов, то минимальный периметр будет у «оптического» треугольника, который окажется вписанным правильным треугольником.

❧ 288. Любой вписанный n -угольник с минимальной суммой квадратов сторон (если он существует и не вырождается) удовлетворяет следующему условию. Для любой его малой диагонали, т.е. такой, что по одну сторону от нее лежит только одна его вершина, отрезок, соединяющий эту вершину с серединой диагонали («медиана»), перпендикулярен стороне описанного n -угольника, содержащей эту вершину.

Указание. Применить задачу 112. Если это условие не выполнено, то можно сдвинуть одну вершину так, что сумма квадратов сторон уменьшится.

Для решения задачи 288 можно применить следующий алгебраический подход. Пусть стороны данного n -угольника равны a_i . На каждой из них выберем систему координат (например с центром в середине стороны) и вписанный n -угольник тогда можно

задать вектором $(x_1, \dots, x_n)$, где $|x_i| \leq a_i/2$ — координаты его вершин. Квадраты длин его сторон вычисляются по формулам теоремы косинусов

$$l_i^2 = (a_i/2 \pm x_i)^2 + (a_{i+1}/2 \pm x_{i+1})^2 + 2(a_i/2 \pm x_i)(a_{i+1}/2 \pm x_{i+1}) \cos \phi_i,$$

где ϕ_i — угол при соответствующей вершине, а знаки $\pm$ выбираются в соответствии с выбранными положительными направлениями на каждой стороне a_i . Тогда задача минимизации суммы квадратов сторон формулируется как поиск минимума функции $l_1^2 + \dots + l_n^2$ на множестве наборов $(x_1, \dots, x_n)$, $|x_i| \leq a_i/2$, $i = 1, \dots, n$. Аналогично формулируются задачи минимизации периметра и минимизации максимальной стороны. Во всех трех случаях функции, которые надо минимизировать, являются вогнутыми, причем в первом случае функция строго вогнутая (потому что квадрат расстояния строго вогнутая функция от своих аргументов). Поэтому в первом случае минимум достигается в одной точке (а во втором случае минимум может достигаться во многих точках, и локальный минимум тоже один, поэтому в этой точке производные по всем направлениям равны нулю. Так как функция $l_1^2 + \dots + l_n^2$ является многочленом второй степени, то указанные производные являются линейными функциями и точка $(x_1, \dots, x_n)$, в которой достигается минимум является, единственным решением системы линейных уравнений. Эту систему можно решить за $O(n^3)$ арифметических операций, а используя современные методы «быстрой» линейной алгебры и существенно быстрее (за $O(n^{2.4})$ операций, см., например, [2]). Если найденная точка минимума находится вне множества $((x_1, \dots, x_n))$, $|x_i| \leq a_i/2$, $i = 1, \dots, n$, то минимум на этом множестве будет достигаться в его вершинах, т.е. в точках вида $(x_1, \dots, x_n)$, $|x_i| = a_i/2$, а это означает, что экстремальный m -угольник имеет все вершины в вершинах данного n -угольника. Чтобы его найти, надо перебрать все такие m -угольники, являющиеся вырождениями вписанных n -угольников. Каждый из них определяется множеством вершин n -угольника, не являющихся вершинами этого m -угольника. Среди этих вершин не может быть двух соседних, и любой такой набор вершин определяет m -угольник, образо-

ванный остальными вершинами, который является вырождением некоторого вписанного n -угольника.

❖ 289*. Проверьте, что число таких вырожденных m -угольников, вписанных в данный n -угольник, удовлетворяет рекуррентному соотношению $L_n = L_{n-1} + L_{n-2}$, $L_3 = 4$, $L_4 = 7$. Докажите, что $L_n = \phi^n + (-1/\phi)^n$, где $\phi = (\sqrt{5} + 1)/2$. Числа L_n называются числами Люка.

Указание. Обозначим через F_n число, равное числу подмножеств множества $\{1, \dots, n\}$, не содержащих ни одной пары соседних чисел. Очевидно, что $F_1 = 2$, $F_2 = 3$. Число подмножеств, не содержащих n , равно F_{n-1} , а число подмножеств, содержащих n , равно F_{n-2} . Поэтому $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$. Последовательность F_n совпадает с последовательностью Фибоначчи, если последнюю начинать с $F_1 = F_0 = 1$ (см., например, [24]). Число L_n равно числу подмножеств множества $\{1, \dots, n\}$, не содержащих соседних чисел в циклическом смысле (т.е. когда числа $1, n$ тоже считаются соседними). Очевидно, $L_2 = 3$, $L_3 = 4$, и далее $L_n = F_{n-1} + F_{n-3}$ (подмножество, содержащее n , не содержит 1 и $n-1$). Тогда $L_n = F_{n-1} + F_{n-3} = F_{n-2} + F_{n-3} + F_{n-4} + F_{n-5} = L_{n-1} + L_{n-2}$ при $n \geq 5$, можно положить $L_1 = 1$, $L_0 = 2$, тогда $L_n = L_{n-1} + L_{n-2}$ будет выполняться при $n \geq 2$, и равенство $L_n = \phi^n + (-1/\phi)^n$ будет справедливо при $n = 0, 1$, так как $1/\phi = (1 - \sqrt{5})/2$, а $\phi^n + (-1/\phi)^n = \phi^{n-1} + (-1/\phi)^{n-1} + \phi^{n-2} + (-1/\phi)^{n-2}$ в силу равенств $\phi^2 = \phi + 1$, $\phi^{-2} = -\phi^{-1} + 1$, то, применяя индукцию, имеем $L_n = \phi^n + (-1/\phi)^n$ при всех $n \geq 2$.

❖ 290. Вписать в данный параллелограмм четырехугольник с минимальной суммой квадратов сторон.

Указание. Это параллелограмм, у которого диагонали перпендикулярны сторонам данного параллелограмма.

❖ 291. Для выпуклого n -угольника любой вписанный в него m -угольник ($m \leq n$) с минимальной длиной наибольшей стороны (если он существует и не вырождается) и при этом наименьшим числом наибольших сторон (если их несколько) удовлетворяет следующему условию. Для любой его наибольшей стороны

угол, образованный ею с прикасающейся ее стороной описанного n -угольника, может быть острым только в том случае, если смежная с точкой прикосновения вторая сторона вписанного n -угольника тоже наибольшая и сама образует подобный же острый или прямой угол.

Указание. Если это условие не выполнено, то можно сдвинуть одну вершину так, что максимум из двух смежных с ней сторон уменьшится.

❶ 292. Вписать в данный квадрат треугольник с минимально возможным диаметром так, чтобы стороны не лежали на сторонах квадрата.

Указание. Если стороны треугольника могут лежать на сторонах квадрата, то минимальный диаметр стремиться к нулю. Если вершины треугольника лежат на разных сторонах квадрата, то минимальный диаметр равен длине стороны квадрата. Если одна из вершин треугольника совпадает с вершиной квадрата, то минимум достигается на правильном треугольнике, который определяется однозначно (см. задачу 449).

❶ 293*. Вписать в данный ромб треугольник с минимально возможным диаметром.

Все вписанные в данный прямоугольник ромбы удовлетворяют условию задачи 291. Но согласно задаче 161 они все подобны, поэтому минимальные сумму квадратов сторон, периметр и сторону имеет среди них только один — с вершинами в серединах сторон ромба. Согласно задаче 277 он имеет минимальную сумму квадратов сторон и минимальную наибольшую сторону среди всех вписанных четырехугольников, причем он является единственным экстремальным четырехугольником.

❶ 294*. Для произвольного ромба найти вписанный в него четырехугольник с минимальной длиной максимальной стороны.

Указание. Это вписанный в данный ромб квадрат (его диагонали которого повернуты на 45° градусов по отношению к диагоналям описанного ромба). Он имеет минимальное значение длины наибольшей стороны среди всех вписанных в данный ромб че-

тырехугольников и треугольников. Пусть $KLMN$ — минимальный в указанном смысле четырехугольник, $K \in [AB]$, $L \in [BC]$, $M \in [CD]$, $N \in [DA]$. Для доказательства сначала заметим, что если вписать в ромб $ABCD$ квадрат $A'B'C'D'$, $A' \in [AB]$, $B' \in [BC]$, $C' \in [CD]$, $D' \in [DA]$, то можно считать без ограничения общности, что $K \in [AA']$, $L \in [BB']$, $M \in [CC']$, $N \in [DD']$ (иначе, если, например, $K \in [AA']$, $L \in [B']$, то $|KL| > |A'B'|$). Далее, заметим, что $KLMN$ является ромбом. Иначе, если например $|KN| > |KL|$, и KN — наибольшая сторона, то согласно задаче 291 KN перпендикулярна AB , значит она не перпендикулярна AD , поэтому согласно 291 $|KM| = |NM|$, а так как MN не перпендикулярна CD , то $|NM| = |ML|$, и аналогично из не перпендикулярности LM и BC следует, что $|ML| = |KL|$, а это противоречит предположению, что $|KN| > |KL|$. Центр ромба $KLMN$ лежит на пересечении средних линий ромба $ABCD$, т.е. совпадает с его центром. Пусть $a = |AC|/2$, $b = |BD|/2$, $\angle AOK = \phi$, где O — центр ромба, $\angle BAO = \alpha$. Тогда из теоремы синусов имеем $|KO| = \frac{a \sin \alpha}{\sin(\alpha + \phi)}$, $|LO| = \frac{b \cos \alpha}{\cos(\alpha - \phi)}$ (учитывая, что $KO \perp LO$), а из теоремы Пифагора и равенства $b/a = \operatorname{tg} \alpha$ тогда следует, что

$$\begin{aligned} |KL|^2 &= \frac{a^2 \sin^2 \alpha}{\sin^2(\alpha + \phi)} + \frac{b^2 \cos^2 \alpha}{\cos^2(\alpha - \phi)} = \\ &= (a^2 \sin^2 \alpha) \left(\frac{1}{\sin^2(\alpha + \phi)} + \frac{1}{\cos^2(\alpha - \phi)} \right). \end{aligned}$$

Остается минимизировать $\frac{1}{\sin^2(\alpha + \phi)} + \frac{1}{\cos^2(\alpha - \phi)}$ при $0 \leq \phi \leq \pi/4$. Так как

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sin^2(\alpha + \phi)} + \frac{1}{\cos^2(\alpha - \phi)} &= \frac{\sin^2(\alpha + \phi) + \cos^2(\alpha - \phi)}{\sin^2(\alpha + \phi) \cos^2(\alpha - \phi)} = \\ &= \frac{1 + (\cos 2(\alpha - \phi) - \cos 2(\alpha + \phi))/2}{\sin^2(\alpha + \phi) \cos^2(\alpha - \phi)} = \\ &= \frac{1 + (\cos 2(\alpha - \phi) - \cos 2(\alpha + \phi))/2}{(\sin 2\alpha + \sin 2\phi)^2/4} = 4 \frac{1 - \sin 2\alpha \sin 2\phi}{(\sin 2\alpha + \sin 2\phi)^2}, \end{aligned}$$

а $0 \leq \sin 2\phi \leq 1$, то достаточно найти минимум $\frac{1-ax}{(a+x)^2}$ при $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq a = \sin 2\alpha \leq 1$. Очевидно, что этот минимум достигается при $x = 1$, так как $\frac{1-ax}{(a+x)^2}$ убывает на отрезке $[0, 1]$, потому что числитель убывает, а знаменатель растет.

2.3 Быстрое вычисление различных мер для выпуклых многоугольников

Представляет интерес вопрос о том, как можно вычислить для данного выпуклого n -угольника такие его характеристики (измерения, меры) как введенные в предыдущих разделах величины p, s, r, h, R . Для аккуратной постановки подобных задач можно использовать две близких друг к другу, но различных формализации. Одна из них состоит в построении по данному n -угольнику (а для некоторых задач — по данным n точкам) отрезка, длина которого равна данному измерению n -угольника. Вторая состоит просто в вычислении этого измерения. В первом формализации в качестве меры сложности построения (циркулем и линейкой естественно) можно взять просто число линий (прямых и окружностей), проведенных в этом построении. Во второй формализации в качестве меры сложности естественно взять число арифметических операций, выполняемых в ходе вычисления.

В обоих случаях возникают некоторые тонкости, которые могут играть роль в дальнейшем. Например, имеется определенное различие между *не ветвящимися вычислениями* и *вычислениями с условными переходами*. В первом случае выбор очередной операции не зависит от результатов предыдущих операций. Во втором случае зависит. Например, во втором случае моделью вычислений служит так называемое *алгебраическое решающее дерево*. В нем на каждом шаге выполняется одна из алгебраических операций (так называемых *команд*, занумерованный список которых заранее составлен и образует *ветвящуюся программу*, которая и называется в данном случае алгебраическим решающим деревом), если полученный результат не равен нулю,

то выполняется следующая по списку команда, а если результат равен нулю, то делается так называемый условный переход к другой (не обязательно следующей) команде (номер которой заранее известен).

Обычно алгебраические решающие деревья используют для решения задач распознавания (принадлежности данного объекта к данному классу или множеству), в этом случае в списке команд есть команда «Останов и выдача ответа ДА» и команда «Останов и выдача ответа НЕТ», но можно рассматривать программы (фактически это какие-то диаграммы или графы), в которых команда «Останов» только одна, а результатом работы является некоторое число, вычисленное в ходе работы программы (для хранения чисел в таких программах предусматриваются *ячейки* или *регистры памяти*, каждый из которых хранит определенное число, и среди них специально выделяют *выходные регистры*, в которых и будут записаны результаты работы программы; специально выделяют также *входные регистры*, в которых перед началом работы программы заносятся исходные данные, например координаты заданных точек). От реальных компьютерных программ такие программы отличаются тем, что работают с произвольными действительными числами (а не конечным набором специального вида рациональных чисел, как реальные компьютеры), все операции выполняются абсолютно точно, и программа может работать сколь угодно долго. Время ее работы оценивается как число всех выполненных операций (а не число команд в программе), и называется временной сложностью данной программы (мы пренебрегаем временем на выполнение команд пересылки из одного регистра в другой, которые встречаются в реальных программах).

Подобные же уточнения можно внести и в первую формализацию, хотя в ней имеются свои тонкости, которые впрочем, далее не будут играть существенную роль, более того, все рассматриваемые далее построения фактически не будут содержать никаких ветвлений. Не ветвящиеся геометрические построения по-существу эквивалентны не ветвящимся программам, в которых кроме арифметических операций используется еще извле-

чение квадратного корня (рассматриваются только такие программы, в которых операции деления и извлечения корня всегда выполнимы, не зависимо от входных данных). Эквивалентность понимается в том смысле, что меры сложности вычислений для любой данной задачи в обоих типах программ по порядку одинаковы. Здесь и далее функции (последовательности) $L_i(n)$ называются равными по порядку, если $0 < c \leq L_2/L_1 \leq C$, где константы c , не зависят от n . Будем также использовать обозначение $L_2 = O(L_1)$, если $\leq L_2/L_1 \leq C$.

❶295. Докажите эквивалентность не ветвящихся геометрических построений и не ветвящихся программ в базисе $\{+, -, \times, /, \sqrt{}\}$ в указанном выше смысле.

Указание. Примените алгебраический метод решения задач на построение.

Далее будем использовать программы без операции извлечения корня, но с ветвлениями при выполнении условий типа $f > 0$, $f \geq 0$, $f = 0$. При наличии квадратного корня сравнения вида $f > 0$, $f \geq 0$ фактически можно заменить на сравнения вида $f = 0$, так как $f/\sqrt{f^2} = 1$ при $f > 0$.

❶296. Укажите, как проверить со сложностью $O(n)$, является ли данный n -угольник описанным. Если является, то центр вписанного круга и его радиус можно построить со сложностью $O(1)$.

Указание. Сначала проверить, является ли он выпуклым. Потом применить задачу 248.

❶297. Укажите, как проверить со сложностью $O(n)$, является ли данный n -угольник вписанным. Если является, то центр описанного круга и его радиус можно построить со сложностью $O(1)$.

❶298. Укажите, как проверить со сложностью $O(n)$, имеет ли данный n -угольник точку Люиле. Если имеет, то ее можно построить со сложностью $O(1)$.

❖ 299. Точку, в которой достигается минимум суммы квадратов расстояний до сторон n -угольника, можно построить со сложностью $O(n)$.

Указание. Примените задачу 252.

❖ 300. Периметр и площадь выпуклого n -угольника можно вычислить со сложностью $O(n)$.

Указание. Для вычисления площади можно разбить n -угольник на $n - 2$ непересекающихся треугольника с общей вершиной (*триангулировать*) и сложить их площади. Можно использовать формулу Герона для площади треугольника и операцию извлечения квадратного корня ($(3n - 5)$ раз). Но можно обойтись и вовсе без нее, если использовать формулу для площади параллелограмма с вершинами $(0, 0)$, (x_1, y_1) , (x_2, y_2) (см. задачу 165)

$$|x_1 y_2 - x_2 y_1|.$$

Операция вычисления модуля будет не нужна, если просматривать вершины треугольников в «правильном» порядке. Сложность вычисления будет не больше $6n - 8$ (деление пополам выполняем один раз в самом конце).

Вычисление не ветвящееся, и его сложность не меньше $2n - 1$ (потому, что результат зависит существенно от всех $2n$ координат, используемых в качестве входных данных не ветвящейся программы)

В модели геометрических построений при вычислении площади нужна конечно единица длины, заданная в виде отрезка. Площадь треугольника можно построить, умножая основание на высоту. Делить результат пополам можно в самом конце построения.

При построении периметра единица длины не нужна, и в этом случае построение проще, чем вычисление. При вычислении обойтись без квадратного корня нельзя.

Можно рассматривать подобную же задачу и для случая *простого* (т.е. не обязательного выпуклого, но не самопересекающегося) многоугольника. Результаты будут в основном такими же, но возникают трудности с выполнением триангуляции (всегда ли

можно получить триангуляцию из $n - 2$ треугольников с вершинами в вершинах многоугольника? А с произвольными вершинами?). Аккуратные рассуждения здесь проводить непросто. Трудно доказать даже тот очевидный факт, что простой многоугольник разбивает плоскость на две части (внутреннюю и внешнюю по отношению к нему) — это частный случай теоремы Жордана о кривых, в доказательстве которой допустил ошибки сам Жордан³. Далее, при использовании указанной формулы для площади параллелограмма возникает вопрос, как в ней избавиться от знака модуля. Конечно, это легко сделать, если использовать ветвящуюся программу. А можно ли это сделать без использования условных переходов?

Можно однако обойтись без триангуляции, если воспользоваться следующей формулой [27].

❶ 301*. Пусть координаты вершин простого n -угольника, занумерованных в направлении, например, по часовой стрелке, равны (x_i, y_i) , $i = 1, \dots, n$. Тогда его площадь вычисляется по формуле

$$s = \frac{1}{2}((y_1 + y_2)(x_1 - x_2) + (y_2 + y_3)(x_2 - x_3) + \dots + \\ + \dots + (y_{n-1} + y_n)(x_{n-1} - x_n) + (y_n + y_1)(x_n - x_1)).$$

Указание. Вычислить площадь трапеции, образованной отрезком от вершины (x_i, y_i) до вершины (x_{i+1}, y_{i+1}) , и опущенными из его концов перпендикулярами на ось иксов. Площади учитывать с соответствующим знаком. Если отрезок пересекает ось иксов, то часть трапеции имеет «положительную», а часть — «отрицательную» площадь. Если вершина (x_{i+1}, y_{i+1}) лежит левее вершины (x_i, y_i) , то площадь оказывается отрицательной. Просуммировав «ориентированные» площади трапеций, получаем площадь многоугольника. Сложность вычисления по этой формуле равна $4n$. Из указанной формулы легко следует следующая, более простая на вид формула для площади n -угольника

³Камилл Жордан — выдающийся французский математик 19-го века, автор знаменитого курса математического анализа.

с координатами вершин (x_i, y_i) , в которой для удобства использованы обозначения $x_{n+1} = x_1$, $y_{n+1} = y_1$:

$$S = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (x_k y_{k+1} - x_{k+1} y_k).$$

Однако сложность вычислений по этой формуле также равна $4n$, но по сравнению с предыдущей формулой умножений больше, а сложений меньше. Это означает, что первая формула более эффективна в вычислительном смысле, хотя и выглядит сложнее.

Вопрос о вычислении триангуляции для произвольных n точек (не образующих выпуклый n -угольник и не образующих простой невыпуклый n -угольник) вообще не тривиален. Например, если $n-1$ точка лежит на оси абсцисс, причем не обязательно в монотонном порядке, а еще одна точка лежит на оси ординат (но не в начале координат), то задача построения триангуляции в этом случае равносильна задаче монотонного упорядочения $n-1$ числа. Последнюю же задачу можно интерпретировать как задачу упорядочения по весу n грузов (разного веса) с помощью взвешиваний на коромысловых весах (чашечных весах без гирь). Для ее решения нужны конечно ветвящиеся программы. В программировании такие задачи известны как задачи сортировки (в них рассматривается и случай, когда среди чисел встречаются и равные).

❶ 302*. Докажите, что задача упорядочения n чисел требует по порядку не менее $n \log n$ сравнений.

Указание. Число различных результатов работы программы равно, с одной стороны $n! > (n/3)^n$, а с другой стороны — не больше 3^m , где m — число выполненных сравнений (исходов сравнения три: $>$, $=$, $<$).

Задача точного нахождения минимального числа сравнений при больших n , поставленная польским математиком Г.Штейнгаузом, не решена до сих пор.

Из задачи 302 следует, что задачу построения триангуляции для данных n произвольных точек нельзя решить со сложностью, по порядку меньшей $n \log n$.

Отметим одну тонкость. В модели геометрических построений построение триангуляции для n точек указанного выше примера можно конечно выполнить за $O(n)$ операций, так как упорядочение n данных точек на прямой в этой модели делать не нужно: глаз сам видит, в каком порядке расположен точки.

Если же использовать вычислительную модель алгебраические решающие деревья, то нижние оценки $n \log n$ можно получить для многих задач так называемой *вычислительной геометрии* (см. об этом книгу [55]), в частности для задачи *поиска одной пары ближайших соседей*, задачи *поиска всех пар ближайших соседей*, задачи построения *минимального дерева, стягивающего данные точки* (таким деревом для данных n точек является связная система $n - 1$ отрезков с концами в данных точках, т.е. такая, что по этим отрезкам можно пройти из любой точки в любую другую).

Действительно, если n разных точек лежат на прямой, то решив задачу о минимальном дереве для них мы получим монотонное упорядочение этих точек, а это дает нижнюю оценку по порядку $n \log n$. Если же n не обязательно разных точек лежат на прямой, то решив задачу о ближайшей паре, мы узнаем, есть ли среди данных точек совпадающие, или нет (совпадающие точки дают очевидно ближайшую пару). Задача же проверки данных n чисел на предмет равенства каких-то из них в модели алгебраических деревьев решений решается со сложностью не меньше по порядку $n \log n$ (см. [55]).

Существенно более сложно доказывается, что для задач о ближайших соседях, задачи о минимальном дереве, задачи о триангуляции решаются со сложностью $O(n \log n)$ (см. [55]). Для этого используются, например, такие понятия как диаграмма Вороного⁴ и триангуляция Делоне⁵. Эти два понятия тесно связаны друг с другом (триангуляция Делоне является двойственным графом к диаграмме Вороного) и оба строятся со сложно-

⁴Г.Ф. Вороной (1868-1908) выдающийся русский (или украинский, как сейчас пишут в Украине, хотя он даже свой личный дневник писал по-русски) математик

⁵Б.Н. Делоне (1890-1980) выдающийся советский математик.

стью $O(n \log n)$. Исходя из триангуляции Делоне можно построить минимальное дерево даже со сложностью $O(n)$ (известно, что минимальное стягивающее дерево в произвольном графе с e ребрами, которым сопоставлены числа, можно найти со сложностью $O(e \log e)$ и со сложностью, меньшей e найти нельзя). Исходя из диаграммы Вороного для данных n точек поиск ближайшего соседа $O(\log n)$ при использованном объеме памяти $O(n)$, а построить выпуклую оболочку этих точек можно построить со сложностью $O(n)$. Более сложной оказывается упоминавшаяся выше задача построения триангуляции внутренности простого n -угольника (потому, что на триангуляцию наложено некоторое ограничение), но она все равно решается в [55] со сложностью $O(n \log n)$.

Для темы нашей книги видимо более интересной является следующая задача.

❶ 303*. Построить выпуклую оболочку n точек со сложностью $O(n \log n)$.

Указание. Известны разные алгоритмы для этой задачи. Далее будет кратко изложен алгоритм Грехэма-Эндрю. Спроектируем перпендикулярно точки на произвольную прямую и выберем крайние проекции, получим два перпендикуляра, являющиеся параллельными опорными прямыми для искомой выпуклой оболочки. Сложность этого построения равна $O(n)$. Пусть A, B — точки выпуклой оболочки, лежащие на этих прямых. Проведем через них прямую. Она разбивает наше множество (и его выпуклую оболочку) на два подмножества (выпуклыми оболочками которых являются указанные части искомой выпуклой оболочки). Достаточно построить их выпуклые оболочки по отдельности, и их очевидное объединение будет искомой выпуклой оболочкой данного множества. Рассмотрим любое из указанных подмножеств $p_1, \dots, p_m$, $m < n$. Они выделяется «бесплатно», если мы используем модель геометрических построений, или со сложностью $O(n)$ в вычислительной модели. Упорядочим этим m точек в порядке расположения их указанных проекций. В модели геометрических построений это тоже «бесплатно», а в вычисли-

тельной модели указанное упорядочение выполняется со сложностью $O(n \log n)$ любым хорошим алгоритмом сортировки (см., например, [2]). Просматривая точки в указанном порядке, удаляем каждую точку p_i , если она лежит с той же стороны от отрезка p_{i-1}, p_{i+1} , что и отрезок A, B (т.е. если точка p_i нарушает выпуклость ломаной $A = p_1, \dots, p_{i+1}$), а потом делаем такую же проверку для точек $p_{i+1}, p_{i-1}, p_{i-2}$ (потому что здесь могло возникнуть нарушение выпуклости, которого до удаления точки p_i не было), и опять удаляем «плохую» точку и т.д. Так точки только удаляются, а выпуклая оболочка при этом не меняется, то этот алгоритм заканчивает работу не позднее, чем на $m - 3$ -ем шаге. Сложность всего вычисления равна $O(n)$. Аналогично вычисляем выпуклую оболочку второго подмножества. В модели геометрических построений сложность всего алгоритма равна $O(n)$, но в вычислительной модели она равна $O(n \log n)$ из-за необходимости сортировки.

☞ 304. (Шеймос) Для вычислительной модели показать, что сложность алгоритма построения выпуклой оболочки не может быть меньше по порядку $n \log n$.

Указание. Пусть $x_i, i = 1, \dots, n$ — произвольный набор различных чисел и $p_i = (x_i, x_i^2)$ — n точек на параболе $y = x^2$. При построении выпуклой оболочки этих точек они упорядочиваются по величине абсциссы. Поэтому решается задача сортировки n чисел. А ее сложность по порядку не менее $n \log n$ согласно задаче 302.

☞ 305*. Выпуклую оболочку объединения n -угольника и m -угольника можно построить с той же сложностью.

Указание. Использовать идею алгоритма Грехэма.

Как известно, выпуклый n -угольник есть результат пересечения n -полуплоскостей (ограниченных прямыми, проходящими через его стороны).

☞ 306. (Шеймос) Для вычислительной модели показать, что сложность алгоритма построения пересечения n полуплоскостей не может быть меньше по порядку $n \log n$.

Указание. Берем те же точки на той же параболе, что и в указании к задаче 304 и через каждую из них проводим касательную к параболе. Эти касательные определяют полуплоскости, содержащие параболу. Их пересечение есть многоугольная выпуклая бесконечная область, содержащая ту же параболу. Если мы построим эту область, то можно будет считать числа x_i в отсортированном порядке. Поэтому, как и в задаче 304, сложность построения не меньше по порядку $n \log n$.

❖ 307. Докажите, что пересечение выпуклых n -угольника и m -угольника есть выпуклый k -угольник, где $k \leq n + m$

Указание. Пересечение их образовано пересечением $n + m$ полуплоскостей.

❖ 308**. (Шеймос, Хопу) Докажите, что пересечение выпуклых n -угольника и m -угольника можно построить со сложностью $O(n + m)$.

❖ 309*. Докажите, что задачу построения пересечения n полуплоскостей можно решить со сложностью $O(n \log n)$.

Указание. Допустим, что мы построили пересечение первых $\lfloor n/2 \rfloor$ полуплоскостей со сложностью $T(\lfloor n/2 \rfloor)$ и получили k -угольник, $k \leq \lfloor n/2 \rfloor$, и аналогично построили пересечение остальных $\lceil n/2 \rceil$ полуплоскостей со сложностью $T(\lceil n/2 \rceil)$ и получили m -угольник, $m \leq \lceil n/2 \rceil$. Остается построить пересечение этих k - и m -угольника согласно задаче 308 со сложностью $O(k + m) = O(n)$, и получим пересечение всех n полуплоскостей со сложностью $T(n) \leq T(\lfloor n/2 \rfloor) + T(\lceil n/2 \rceil) + O(n)$. Из этой рекуррентной оценки выводится, что $T(n) = O(n \log n)$.

❖ 310. Для данного выпуклого n -угольника и любого заданного направления можно построить две опорные прямые, параллельные этому направлению, со сложностью $O(\log n)$.

Указание. Вначале проведем прямую данного направления через любую из вершин, разбивающую n -угольник на две части. Возможно, она сразу окажется опорной. В противном случае она разбивает n -угольник на две части (возможно, в одной

из них только одна из его вершин). Пусть, например, справа от этой прямой оказались вершины $p_1, \dots, p_m$ (занумерованы в том же порядке, в каком они были в n -угольнике). Найдем среди них наиболее удаленную от этой прямой и через нее проведем параллельную ей прямую. Она и будет опорной справа. Аналогично строим опорную слева (если вообще это нужно). Чтобы найти наиболее удаленную вершину (их может быть две, тогда через них и проходит искомая опорная) используем двоичный поиск. Возьмем вершину со «средним» номером $p_{\lfloor m/2 \rfloor}$ и двух ее соседей слева и справа. Измерим расстояния от них до проведенной прямой (опустим перпендикуляры или вычислим квадраты расстояний, чтобы не использовать квадратный корень). Если «средняя» вершина оказалась из них самой удаленной (или одной из двух самых удаленных) от этой прямой, то в силу выпуклости она и есть самая удаленная от этой прямой из всех m вершин. В противном случае, например, самой удаленной будет ее сосед $p_{\lfloor m/2 \rfloor + 1}$. Тогда искать самую удаленную надо среди точек $p_{\lfloor m/2 \rfloor + 1}, \dots, p_m$. Если же самой удаленной из этой тройки оказалась вершина $p_{\lfloor m/2 \rfloor - 1}$, то самую удаленную из всех m вершин надо искать среди $p_1, \dots, p_{\lfloor m/2 \rfloor - 1}$. В обоих случаях область поисков сократилась вдвое. Далее к нужной области опять применяем такой же прием «деления пополам» и т.д. Нужная вершина будет найдена за $O(\log n)$ шагов.

☞ 311. Задачу максимизации (минимизации) линейной функции от двух переменных с n линейными ограничениями (это двумерная задача линейного программирования) можно решить со сложностью $O(n \log n)$.

Указание. Вначале строим пересечение заданных полуплоскостей со сложностью $O(n \log n)$ согласно задаче 309 и получаем выпуклый m -угольник, $m \leq n$. Минимизация (максимизация) данной линейной функции на этом m -угольнике равносильна проведению опорной прямой, старшие коэффициенты которой определяются этой функцией. Сложность максимизации (минимизации) поэтому согласно задаче 310 равна $O(\log n)$.

Удивительно, что казалось бы более сложную задачу линейного программирования Меджиддо и Дайер независимо решили со сложностью $O(n)$. Дело в том, что им удалось сделать это, не строя явно выпуклый многоугольник, на котором максимизируется (минимизируется) линейная функция. Этот алгоритм (довольно сложный) можно найти в [55]. Они же показали, что и трехмерная задача линейного программирования решается со сложностью $O(n)$. Меджиддо также показал (см. [55]), модифицировав свой алгоритм, что задача вычисления числа R — радиуса наименьшего круга, покрывающего данные n точек, также может быть решена со сложностью $O(n)$. Так как этот алгоритм сложен, предлагаем более простую задачу

❖ 312. Вычислить объемлющий радиус R для данных n точек со сложностью $O(n^2)$ и памятью $O(1)$.

Указание. Непосредственное применение задачи 26 дает алгоритм с оценкой $O(n^3)$. Но можно вначале взять любую накрывающую данные точки окружность, потом уменьшить ее радиус так, чтобы на ней оказалась одна из данных точек, потом можно уменьшить радиус (и сдвинуть центр) так, чтобы на накрывающей окружности оказалось две точки (все это делается со сложностью $O(n)$, если они образуют диаметр окружности, то все закончено, в противном случае можно, уменьшая радиус и сдвигая центр построить накрывающую окружность с тремя точками на ней (опять со сложностью $O(n)$), и если бы этот треугольник был бы остроугольным, то это и была бы минимальная накрывающая окружность. Если же треугольник тупоугольный, то все данные точки, лежащие на окружности, содержатся на ее дуге меньшей половины окружности. Опять сдвигая центр и уменьшая радиус, можно получить объемлющую окружность, на которой появится еще минимум одна из данных точек, не лежащая на этой дуге, и т.д. На самом деле двигать окружности не надо, достаточно для соответствующих треугольников вычислять (строить) радиусы описанных окружностей и из них выбирать максимум с помощью известного алгоритма. Для вычисления изменений радиуса можно использовать формулу для радиуса описанного

круга $R = abc/4s$. Чтобы избежать вычисления корней, можно использовать формулу $R^2 = a^2b^2c^2/16S^2$, а площадь треугольника вычислять как в задаче 300.

Общая же задача линейного программирования с n линейными ограничениями решается пока только со сложностью $n^{O(1)}$. Наилучшие результаты в этом направлении получены Ю. Е. Нестеровым и их можно найти в [46]. Знаменитый же алгоритм симплекс-метода имеет только экспоненциальную оценку сложности, причем показано на специально построенных примерах, что ее нельзя заменить на полиномиальную. Однако на практике различные его модификации по-прежнему остаются наиболее быстрыми.

Рассмотрим теперь задачу вычисления диаметра у данной точечной совокупности.

313. Найти все диаметры n -точечного множества со сложностью $O(n \log n)$.

Указание. Сначала вычислим выпуклую оболочку со сложностью $O(n \log n)$. Задачу достаточно решить для нее. Пусть она будет m -угольником. Проведем через одну точку все прямые, параллельные его сторонам. Они образуют m углов с общей вершиной. Проведем биссектрисы этих углов. Все это требует сложности $O(m) = O(n)$ в любой из моделей вычисления. Для каждой из этих биссектрис построим пару параллельных ей опорных прямых со сложностью $O(\log m)$. На них лежит только по одной вершине m -угольника. Эти вершины образуют отрезок. Нужный нам диаметры находятся среди этих отрезков. Действительно, пусть есть какой-то диаметр. Проведем через его концы перпендикуляры. Согласно задаче 22 они являются опорными прямыми и не содержат сторон многоугольника. Повернем их на минимальный возможный угол так, чтобы оба они стали параллельны одной из построенных биссектрис. В силу минимальности поворота обе полученные параллельные прямые по-прежнему образуют опорную полосу для m -угольника. Эта полоса появлялась в нашем построении, значит один из построенных выше отрезков совпадает с данным диаметром, ч.т.д. Чтобы найти все

диаметры, достаточно упорядочить построенные отрезки по величине. Это можно сделать со сложностью $O(m \log m)$, причем найдем все диаметры, которых не больше m , как видно из проведенного рассуждения. Впрочем, можно найти все диаметры, сделав $m - 1$ сравнений с помощью стандартного алгоритма поиска максимума.

❶ 314*. Вычислить диаметр у произвольного n -точечного множества по порядку менее чем за $n \log n$ невозможно.

Указание. Пусть даны два произвольных n -элементных множества положительных чисел $A = \{a_1, \dots, a_n\}$, $B = \{b_1, \dots, b_n\}$. Известно (Рейнголд), что задача определения, есть ли у них общее число, не может быть решена со сложностью по порядку меньше $n \log n$. Рассмотрим единичную окружность и выберем на ней n точек в первой квадрате, получающихся в пересечении с прямыми $y = a_i x$, и аналогично n точек в третьем квадранте, получающихся в пересечении с прямыми $y = b_i x$. Очевидно, что диаметр этого $2n$ -элементного множества равен 2 тогда и только тогда, когда множества A и B пересекаются. Поэтому, если мы решили задачу о вычислении диаметра, то решим и задачу о сравнении числовых множеств. Тем не менее, в [55] доказано, что у выпуклого n -угольника и даже у простого не обязательно выпуклого n -угольника все диаметры можно найти со сложностью $O(n)$. Так как у правильного нечетногоугольника число диаметров равно n , эта оценка неулучшаема.

Рассмотрим теперь задачу вычисления ширины выпуклого n -угольника.

❶ 315*. Найти ширину выпуклого n -угольника со сложностью $O(n \log n)$.

Указание. Действовать аналогично решению задачи 313, но строить опорные полосы с краями, параллельными сторонам многоугольника. Отсюда следует, что число полос минимальной ширины не больше n . Ширину можно найти со сложностью $n - 1$ стандартным алгоритмом поиска минимума из n чисел (и даже все полосы минимальной ширины). У правильного нечетногоуголь-

ника число опорных полос минимальной ширины в точности равно числу вершин.

Можно предложить не очень простые алгоритмы, которые у данного выпуклого n -угольника находят диаметр и ширину со сложностью $O(n)$ (по поводу см. [55]).

Вычисление r — максимального радиуса вложенного в данный выпуклый n -угольник круга можно свести к максимизации на этом n -угольнике выпуклой вверх функции, являющейся минимумом из n линейных функций. Последняя задача равносильна построению выпуклого многогранника в трехмерном пространстве, ограниченного $n + 1$ плоскостью и максимизации на нем линейной функции. Трехмерная задача линейного программирования согласно [55] может быть решена со сложностью $O(n)$.

2.4 Симметризация по Минковскому

Для любых двух плоских множеств A и B множество всех точек, являющихся серединами отрезков, у которых один конец принадлежит A , а другой B , обозначим $(A+B)/2$ и назовем *полусуммой* этих множеств.

☞ 316. Докажите, что если множества подвергнуть параллельному переносу, то и их полусумма подвергнется параллельному переносу.

☞ 317. Докажите, что полусумма окружностей радиусов r_i есть окружность радиуса $(r_1 + r_2)/2$ и аналогичное утверждение верно для кругов.

Указание. Примените задачу 316 и рассмотрите случай, когда окружности концентричны.

☞ 318. Докажите, что полусумма параллельных отрезков длины l_i есть параллельный им отрезок длины $(l_1 + l_2)/2$.

Указание. Примените задачу 316 и рассмотрите случай, когда один отрезок содержит другой и оба имеют общий конец.

☞ 319. Докажите, что полусумма непараллельных отрезков длины l_i есть параллелограмм, со сторонами параллельными этим отрезкам, и имеющим длины $l_i/2$.

Указание. Примените задачу 316 и рассмотрите случай, когда один отрезки имеют общий конец.

☞ 320. Докажите, что если множество A_i содержится во множестве M_i , $i = 1, 2$, то множество $(A_1 + A_2)/2$ содержится во множестве $(M_1 + M_2)/2$.

☞ 321. Докажите, что полусумма выпуклых множеств является выпуклым множеством.

Указание. Примените задачи 320, 318, 319.

Решения предшествующих задач этого раздела можно найти, например в [77, 16, 17].

☞ 322. Докажите, что полусумма двух параллельных полос является полосой, ширина которой равна полусумме ширин данных полос, и которая параллельна этим полосам.

Указание. Примените задачи 320, 318.

☞ 323. (С.Петербург, 2012) Докажите, что для любых чисел x, y , таких, что $x^2 + y^2 \leq 1$, найдутся числа x_i, y_i , такие, что $|x_1| \leq 1$, $|y_1| \leq 1$, $|x_2| + |y_2| \leq 1$, $2x = x_1 + x_2$, $2y = y_1 + y_2$.

Указание. Докажите, что полусумма квадрата и вписанного в него квадрата, вершины которого лежат в серединах сторон большего квадрата есть выписанный в больший квадрат равноугольный восьмиугольник, содержащий в себе круг, вписанный в больший квадрат.

☞ 324. Докажите, что если множество A_i имеет ширину b_i , то ширина множества $(A_1 + A_2)/2$ не меньше $(b_1 + b_2)/2$.

Указание. Рассмотрите полосу наименьшей ширины, содержащую фигуру $(A_1 + A_2)/2$ и полосы с параллельными ей краями, ограничивающие фигуры A_i . Примените задачи 320, 322.

☉ 325. Докажите, что если множество A_i имеет внешний радиус R_i , то внешний радиус множества $(A_1 + A_2)/2$ не больше $(R_1 + R_2)/2$.

Указание. Примените задачи 320, 317.

☉ 326. Докажите, что если множество A_i имеет внутренний радиус r_i , то внутренний радиус множества $(A_1 + A_2)/2$ не меньше $(r_1 + r_2)/2$.

Указание. Примените задачи 320, 317.

☉ 327. Докажите, что если множество A_i имеет диаметр D_i , то диаметр множества $(A_1 + A_2)/2$ не больше $(D_1 + D_2)/2$.

Указание. Примените задачи 319 или 22.

☉ 328*. Если два выпуклых многоугольника не имеют параллельных сторон, то полусумма этих многоугольников есть многоугольник, стороны которого параллельны сторонам этих многоугольников и вдвое меньше их. Число сторон у полусуммы многоугольников равно общему количеству сторон у этих многоугольников и периметр полусуммы равен полусумме периметров данных многоугольников.

Указание. Примените задачи 320, 319, 321.

☉ 329*. Если два выпуклых многоугольника имеют параллельные стороны, то полусумма этих многоугольников имеет сторону, параллельную этим сторонам, которая равна их полусумме. В общем случае число сторон у полусуммы многоугольников не больше общего количества сторон у этих многоугольников, но периметр полусуммы по прежнему равен полусумме периметров данных многоугольников.

Указание. Примените задачи 320, 319, 318, 321.

Выберем на плоскости произвольную точку O и обозначим $(-M)$ множество, центрально-симметричное множеству M относительно точки O . Полусумму этих множеств обозначим M^* и назовем *симметризацией по Минковскому*⁶ (для краткости в

⁶Герман Минковский — выдающийся немецкий математик 19 – 20 веков. Родился в польской части Российской империи.

этом разделе будем писать просто симметризацией) множества M .

☞ 330. Докажите, что симметризация множества не зависит от выбора точки O в том смысле, что при выборе другой точки новая симметризация получается параллельным переносом старой.

Указание. Примените 316.

☞ 331. Докажите, что симметризация выпуклого множества — центрально-симметричное выпуклое множество. Если множество центрально-симметрично, то симметризация его не изменяет.

☞ 332. Докажите, что при симметризации множества его внешний радиус R не возрастает, а внутренний радиус r не убывает.

Указание. Примените задачи 325, 326.

☞ 333. Докажите, что симметризацией треугольника является шестиугольник в полтора раза большей площади.

Указание. Примените задачу 328.

☞ 334. Докажите, что симметризацией трапеции является шестиугольник.

Указание. Примените задачу 329.

☞ 335. Докажите, что симметризация выпуклого n -угольника является $2m$ -угольником, где $m \leq n$. Равенство возможно лишь когда n -угольник не содержит параллельных сторон.

Указание. Примените задачи 328, 329.

☞ 336. Докажите, что при симметризации выпуклого выпуклого множества его диаметр и ширина не меняются.

Указание. Примените задачи 324, 327, 318.

☞ 337. Докажите, что при симметризации выпуклого n -угольника его периметр не меняется.

Указание. Примените задачи 328, 329.

☞ 338*. Докажите, что при симметризации множества его внешний радиус R уменьшается не более чем в $2/\sqrt{3}$ раза. Равенство достигается лишь когда во множество M можно вписать правильный треугольник того же диаметра и внешняя окружность описана вокруг этого треугольника.

Указание. Применить теорему Юнга.

☞ 339*. Докажите, что при симметризации множества его внутренний радиус r увеличивается не более чем в полтора раза. Равенство достигается лишь для правильного треугольника.

Указание. Применить теорему Бляшке.

Решения большинства задач этого раздела можно найти, например в [77, 16, 17, 21].

2.5 Изодиаметрические неравенства

Правое неравенство следующей теоремы было доказано в 1922 г. немецким математиком К.Рейнхардтом [83]. Далее приводится более простое доказательство. Левое неравенство, по-видимому, было впервые указано в [21] (см. также [22]). Из [82] автор узнал, что в [78], вероятно не зная о [21, 22], также доказано неравенство, связывающее периметр и ширину. По-видимому, доказательство [78] сложнее, чем [21].

Теорема 13 (Рейнхардт). Пусть p периметр, b ширина и d диаметр выпуклого n -угольника M . Тогда справедливы неравенства

$$2nb \operatorname{tg} \frac{\pi}{2n} \leq p \leq 2nd \sin \frac{\pi}{2n}.$$

Каждое из неравенств точное, если $n \neq 2^k, k \in \mathbb{N}$.

Доказательство. Пусть M^* — симметризация Минковского n -угольника M , т.е.

$$M^* = \frac{1}{2}(M + (-M)) = \{(x - y)/2 : x, y \in M\}.$$

Тогда согласно задачам 335, 336, 337 множество M^* есть центрально-симметричный выпуклый $2m$ -угольник, где $m \leq n$, с теми же периметром, диаметром и шириной что и у M . Согласно

задаче 25 из центральной симметричности M^* следует, что его внутренний радиус $r^* = b/2$ и внешний радиус $R^* = d/2$. Согласно задаче 234 последовательность $n \operatorname{tg} \frac{\pi}{n}$ строго монотонно убывает, а последовательность $n \sin \frac{\pi}{n}$ строго монотонно возрастает. Поэтому

$$\begin{aligned} 2nb \operatorname{tg} \frac{\pi}{n} &\leq 2mb \operatorname{tg} \frac{\pi}{2m} = 4mr^* \operatorname{tg} \frac{\pi}{2m} \leq p \leq 4mR^* \sin \frac{\pi}{2m} = \\ &= 2md \sin \frac{\pi}{2m} \leq 2nd \sin \frac{\pi}{2n}, \end{aligned}$$

причем равенства $p = 2nb \operatorname{tg} \frac{\pi}{n}$, $p = 2nd \sin \frac{\pi}{2n}$ лишь тогда справедливы, когда M^* есть правильный $2n$ -угольник.

Очевидно, для правильного n -угольника при нечетном n справедливы равенства $p = 2nb \operatorname{tg} \frac{\pi}{n} = 2nd \sin \frac{\pi}{2n}$, а при четном n ни одно из них не верно. Однако при четном n , не равном степени двойки, указанные равенства могут достигаться.

Примеры n -угольников, для которых они достигаются, можно построить следующим образом. Представим n произвольным образом в виде $m(2k+1)$. Очевидно, что если $n = 2^s n_0$, где n_0 — нечетно, то число представлений в виде $n = m(2k+1)$ будет равно $\tau(n_0)$ — числу всех различных делителей числа n_0 . Возьмем правильный $2k+1$ -угольник с диаметром (наибольшей диагональю) d и с центром в каждой его вершине построим круг радиуса d . Очевидно он будет проходить через концы противоположащей к данной вершине стороны $2k+1$ -угольника, которая будет его хордой, отсекающей от него сегмент, соприкасающийся извне с $2k+1$ -угольником по этой стороне. Рассмотрим выпуклую фигуру, являющуюся пересечением построенных кругов. Очевидно, она будет получаться объединением $2k+1$ -угольника с указанными сегментами. Назовем ее правильным $2k+1$ -угольником Рело. Диаметр этой фигуры по-прежнему будет d , а периметр будет равен сумме дуг построенных кругов, т.е. πd , так как сложив эти дуги вместе, получим половину окружности радиуса d . Ширина этой фигуры во всех направлениях одинакова и равна d . Поэтому данная фигура является примером фигуры постоянной ширины. Впишем в нее n -угольник с равными сторонами так, чтобы среди его вершин содержались все вершины рассматриваемого

$2k + 1$ -угольника. Очевидно каждая из $2k + 1$ упомянутых дуг при этом будет разбиваться на m равных дужек, хорды которых будут сторонами рассматриваемого n -угольника. Диаметр его будет очевидно d , а ширина равна $b = d \cos(\pi/2n)$ — высоте равнобедренного треугольника с ребром d и углом при вершине π/n . Тогда периметр, очевидно, равен $2nd \sin(\pi/2n) = 2b \operatorname{tg}(\pi/2n)$.

Следующая теорема тоже принадлежит К.Рейнхардту [83]. Здесь приводится более простое доказательство.

Теорема 14. Пусть p периметр, s^2 площадь и d диаметр выпуклого n -угольника M . Тогда справедливо неравенство

$$\frac{s}{d} \leq \sqrt{\frac{n}{2} \cos \frac{\pi}{n} \operatorname{tg} \frac{\pi}{2n}},$$

которое обращается в равенство только для правильных нечетноугольников.

Доказательство. Из неравенства Зенодора

$$\frac{p}{s} \geq 2\sqrt{n \operatorname{tg} \frac{\pi}{n}}$$

и доказанного выше неравенства

$$p \leq 2nd \sin \frac{\pi}{2n}$$

следует неравенство

$$\frac{s}{d} \leq \sqrt{\frac{n}{2} \cos \frac{\pi}{n} \operatorname{tg} \frac{\pi}{2n}},$$

которое очевидно обращается в равенство только когда оба неравенства обращаются в равенства. Но для второго из них это верно только в случае правильного n -угольника, а для первого из них в этом случае равенство возможно лишь когда n нечетно.

❖ 340. Среди всех n -угольников (n не равно степени двух) с данной шириной найдите тот, кто имеет минимальную сумму квадратов сторон.

Указание. Применить неравенство Коши. Ответ: любой экстремальный n -угольник Рейнхардта.

☞ 341. Решить предыдущую задачу для четырехугольников.

2.6 Экстремальные многоугольники Рейнхардта

В следующей теореме более подробно рассматривается случай обращения неравенств теоремы в равенства.

Теорема 15. Пусть $R(n)$ есть число попарно не равных n -угольников Рейнхардта, т.е. таких, что выполнены равенства

$$2nb \operatorname{tg} \frac{\pi}{2n} = p = 2nd \sin \frac{\pi}{2n}.$$

Тогда

$$(i) \quad R(n) = 0 \iff n = 2^k, \quad k \in \mathbb{N};$$

для любого $n \in \mathbb{N}$

$$(ii) \quad \frac{1}{2n} \sum_{2|m|n} 2^{n/m} (\varphi(m) - \mu(m)) \leq R(n) < \frac{1}{2n} \sum_{2|m|n} 2^{n/m} \varphi(m);$$

для $n = 2^l p^k, k, l \in \mathbb{N}$, где $p > 2$ — простое число,

$$(iii) \quad R(n) = \frac{1}{2n} \sum_{2|m|n} 2^{n/m} (\varphi(m) - \mu(m)) = \\ = \frac{1}{2n} (2^{n/p} p + 2^{n/p^2} p(p-1) + \dots + 2^{n/p^k} p^{k-1}(p-1)) \sim 2^{n/p} p / 2n;$$

$$(iv) \quad R(n) = 1 \iff n = p \text{ или } n = 2p, p > 2, p \text{ — простое.}$$

Здесь $\varphi(n)$ — функция Эйлера, $\mu(n)$ — функция Мебиуса, $m | n$ — обозначение для отношения делимости натуральных чисел.

Значение функции Эйлера $\varphi(n)$ по определению равно числу правильных несократимых дробей со знаменателем n .

342. Докажите, что

$$\phi(n) = n(1 - 1/p_1) \dots (1 - 1/p_k),$$

где $p_1, \dots, p_k$ — все различные простые делители n .

Функция Мебиуса определяется следующим образом

$$\mu(n) = \begin{cases} 1, & \text{если } n = 1, \\ 0, & \text{если } n \text{ делится на квадрат простого} \\ & \text{числа,} \\ (-1)^k, & \text{если } n \text{ есть произведение } k \text{ различных} \\ & \text{простых чисел.} \end{cases}$$

Пункт (ii) дает следующую геометрическую характеристику простых чисел: нечетное число n является простым если и только если $R(n) = 1$, т.е. если существует единственный n -угольник Рейнхардта. Аналогично получается и вторая характеристика: нечетное число n является простым если и только если $R(2n) = 1$, т.е. если существует единственный $2n$ -угольник Рейнхардта.

Доказательство. Пусть M такой n -угольник, что M^* — правильный $2n$ -угольник. Ориентируем все стороны многоугольника M^* в одном направлении и сопоставим им вектора, изображающие комплексные корни $2n$ -й степени из единицы

$$1, \varepsilon, \varepsilon^2, \dots, \varepsilon^{2n-1},$$

где $\varepsilon = \exp \frac{2\pi i}{2n}$. Ясно, что $-\varepsilon^i = \varepsilon^{n+i}$. Тогда сторонам n -угольника M однозначно сопоставляется n -элементное множество, также обозначаемое M , лежащее в группе корней из единицы $W_{2n} = \{1, \varepsilon, \dots, \varepsilon^{2n-1}\}$. Если расположить вектора этого множества в определенном порядке так, чтобы начало очередного вектора совпало с концом предыдущего, то они будут ограничивать n -угольник, подобный n -угольнику M . Если расположить вектора аналогичным образом, но в противоположном порядке,

получится многоугольник, симметричный предыдущему относительно некоторой прямой. Естественно, центрально-симметричному многоугольнику $(-M)$ соответствует множество $(-M)$ такое, что $M \cap (-M) = \emptyset$. Ясно, что условия $M \cap (-M) = \emptyset$ и $M \cup (-M) = W_{2n}$ равносильны. Они равносильны также тому, что в каждой паре противоположных векторов $\{\varepsilon^i, -\varepsilon^i\}$ один принадлежит M , а другой принадлежит $-M$. Также очевидно, что

$$\sum_{\varepsilon^i \in M} \varepsilon^i = 0,$$

так как сумма векторов, в которые превращаются ориентированные в одном направлении стороны многоугольника, равна нулю. Расположение векторов в любом другом порядке, хотя и имеет всегда сумму равную нулю, приводит к невыпуклому или самопересекающемуся многоугольнику.

Обозначим через A_n множество

$$\{M : M \subset W_{2n}, |M| = n, M \cap (-M) = \emptyset\}$$

(здесь и далее $|M|$ обозначает число элементов во множестве M .)

Так как из каждой пары $\{\varepsilon^i, -\varepsilon^i\}$ только один элемент принадлежит M , то $|A_n|$ равно 2^n . Обозначим через A_n^* подмножество A_n , состоящее из таких множеств M , для которых сумма входящих в них векторов равна нулю. Обозначим $A_{n,m}$ подмножество

$$\{M : M \in A_n, |Aut M| = m\},$$

где группа $Aut M = \{w : w \in W_{2n}, M = Mw\}$. С геометрической точки зрения $Aut M$ есть группа вращений, переводящих множество M в себя. Если $|Aut M| = m$, то $m \mid 2n$ (здесь и далее $a \mid b$ означает, что a делит b , а $a \nmid b$ означает, что a не делит b) и эта группа

$$Aut M = \{1, \varepsilon^{2n/m}, \varepsilon^{4n/m}, \dots, \varepsilon^{2n-2n/m}\},$$

т.е. состоит из поворотов на углы $2k\pi n/m$, $k = 0, \dots, m-1$ (поворот на нулевой угол — это тождественное преобразование). Так

как множество $M \in A_{n,m}$, $m > 1$ переходит в себя при нетривиальном повороте вокруг начала координат, то сумма его векторов равна нулю, иначе бы она изменялась при этом повороте. Алгебраическое доказательство этого также уместается в несколько строк. Действительно, если $M \in A_{n,m}$, $m > 1$, $x \in \text{Aut } M$, $x \neq 1$, тогда

$$\sum_{\varepsilon^i \in M} \varepsilon^i = \sum_{x\varepsilon^i \in M} x\varepsilon^i = x \sum_{x\varepsilon^i \in M} \varepsilon^i = x \sum_{\varepsilon^i \in M} \varepsilon^i,$$

следовательно

$$(1-x) \sum_{\varepsilon^i \in M} \varepsilon^i = 0, \quad \sum_{\varepsilon^i \in M} \varepsilon^i = 0,$$

поэтому

$$\sum_{\varepsilon^i \in M} \varepsilon^i = 0$$

и $M \in A_n^*$. Значит $A_{n,m}$ содержится в A_n^* , т.е. $A_{n,m}$ можно было определить равенством

$$\{M : M \in A_n^*, |\text{Aut } M| = m\}.$$

Если m четное число, то $-1 = \varepsilon^{(2n/m)(m/2)} \in \text{Aut } M$, т.е. указанная группа содержит поворот на 180 градусов (центральную симметрию), поэтому в этом случае $-M = M$. Но по условию это невозможно, так как $M \cap (-M) = \emptyset$ для $M \in A_{n,m}$, следовательно $A_{n,m} = \emptyset$ при четных m .

Если же m нечетно, делит n и $M \in A_{n,m}$ то рассмотрим подмножество

$$M_m = M \cap \{1, \varepsilon, \varepsilon^2, \dots, \varepsilon^{\frac{2n}{m}-1}\}.$$

Ясно, что

$$|M_m| = n/m, \quad (-M)_m = \left(M_m + \frac{n}{m}\right) \bmod \frac{2n}{m}, \quad M_m \cap (-M)_m = \emptyset,$$

ведь

$$\varepsilon^{2n/m} M = M, \quad \varepsilon^{n/m} M = \varepsilon^{n/m} (\varepsilon^{2n/m})^{(m-1)/2} M = -M.$$

Удобно вместо множества

$$M_m = \{\varepsilon^{k_1}, \dots, \varepsilon^{k_{n/m}}\}$$

рассматривать множество $M_m = \{\varepsilon^{mk_1}, \dots, \varepsilon^{mk_{n/m}}\} \subset W_{2n/m}$. Тогда

$$|M_m| = n/m, \quad M_m \cap (-M)_m = \emptyset, \quad |\text{Aut } M_m| = 1,$$

ведь из условия $|\text{Aut } M_m| = k > 1$ следовало бы, что

$$|\text{Aut } M| = mk > m$$

в противоречии с условием $M \in A_{n,m}$. Поэтому $M_m \in A_{\frac{n}{m},1}$. Указанное выше отображение $M \leftrightarrow M_m$ взаимно однозначно, поэтому справедливо равенство

$$|A_{n,m}| = \left| A_{\frac{n}{m},1} \right|.$$

Следовательно

$$|A_n| = \sum_{2 \nmid m|n} |A_{n,m}| = \sum_{m|n_0} |A_{n,m}| = \sum_{m|n_0} \left| A_{\frac{n}{m},1} \right|,$$

где n_0 максимальный нечетный делитель n , т.е. $n = n_0 2^s$, $s = 0, 1, \dots$

Если положить $f_k = |A_{kn/n_0}| = (2^k)^{n/n_0}$, $g_k = |A_{kn/n_0,1}|$, $k \in \mathbb{N}$, то для нечетных k получим, что

$$f_k = |A_{kn/n_0}| = \sum_{m|k} \left| A_{\frac{kn/n_0}{m},1} \right| = \sum_{m|k} g_{k/m}.$$

Далее нам понадобится следующая лемма о преобразовании Мебиуса.

Лемма 1. Пусть числовая последовательность $\{f_n\}$ выражается через последовательность $\{g_n\}$ формулами

$$f_n = \sum_{m|n} g_m.$$

Тогда последовательность $\{g_n\}$ может быть выражена через последовательность $\{f_n\}$ формулами

$$g_n = \sum_{m|n} \mu(n/m) f_m.$$

Перед тем, как доказать лемму, заметим, что справедливо равенство

$$\delta(n) = \sum_{m|n} \mu(m),$$

где $\delta(n) = 0$ при $n > 1$ и $\delta(1) = 1$.

Действительно, если n имеет различные простые делители p_i , $i = 1, \dots, k$ то оставляя в сумме только ненулевые слагаемые, и применяя в конце формулу бинома, имеем

$$\begin{aligned} \sum_{m|n} \mu(m) &= \sum_{\alpha_i=0,1} \mu(p_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k}) = \\ &= \sum_{m=0}^k C_k^m (-1)^m = (1-1)^k = 0. \end{aligned}$$

Для доказательства леммы достаточно индукцией по n убедиться в однозначности восстановления последовательности $\{g_n\}$ и проверить, что

$$\sum_{m|n} g_m = \sum_{m|n} \sum_{k|m} \mu(m/k) f_k = f_n.$$

Обозначая m/k через d , и меняя порядок суммирования в двойной сумме, согласно доказанному выше равенству имеем

$$\sum_{k|n} f_k \sum_{d|n/k} \mu(d) = \sum_{k|n} f_k \delta(n/k) = f_n,$$

что и доказывает лемму.

❖ 343. Докажите равенство

$$\phi(n) = \sum_{d|n} \mu(d) n/d.$$

Применяя преобразование Мебиуса, имеем

$$g_k = \sum_{m|k} \mu(m) f_{k/m} = \sum_{m|k} \mu(m) (2^{k/m})^{n/n_0} = \sum_{m|k} \mu(m) 2^{kn/(mn_0)}$$

для нечетных k , следовательно

$$|A_{n,1}| = g_{n_0} = \sum_{m|n_0} 2^{n/m} \mu(m).$$

Любопытно, что если n нечетно, то

$$\frac{|A_{n,1}|}{n} = \frac{1}{n} \sum_{m|n} 2^{n/m} \mu(m)$$

равно числу неприводимых двоичных многочленов степени n (формулу для их числа см. в [36]). Известна также связь этого числа с количеством непериодических двухцветных ожерелий из n бусинок. Произвольное двухцветное ожерелье из n бусинок назовем n/k -периодическим, если его можно разрезать на k одинаковых подвесок. Ожерелья, которые не являются k -периодическими ни при каком k , назовем непериодическими и их количество обозначим I_n (ожерелья, получающиеся друг из друга вращением в их плоскости, считаем одинаковыми). Очевидно, что число ожерелий с минимальным периодом k равно I_k . Разрезая разными способами каждое из таких ожерелий, получаем k различных двухцветных ориентированных подвесок. Общее количество подвесок, полученных из всех ожерелий, равно с одной стороны

$$\sum_{d|n} d I_d,$$

а с другой стороны равно 2^n . Поэтому по формуле Мебиуса

$$I_n = \frac{1}{n} \sum_{m|n} 2^{n/m} \mu(m).$$

Это число очевидно равно $|A_{n,1}|/n$ при нечетных n .

Если для некоторого $w \in W_{2n}$ и двух n -элементных множеств $M_1, M \in A_n$ справедливо равенство $M_1 = Mw$ в группе W_{2n} , то эти множества назовем эквивалентными. Другими словами, два множества M и M_1 эквивалентны, если одно из них множеств получается поворотом из другого множества. В частности, M и $-M$ эквивалентны. Очевидно, что если $M \in A_{n,m}$, и M_1 эквивалентно, то $M_1 \in A_{n,m}$, поэтому множество $A_{n,m}$ распадается на непересекающиеся классы эквивалентности. Если $M \in A_{n,m}$, то число различных множеств, которые можно получить поворотами множества M , равно $2n/m$. Значит, в каждом классе $2n/m$ множеств и поэтому число классов эквивалентности в $A_{n,m}$ равно $|A_{n,m}|m/2n$. Геометрически любое разбиение W_{2n} на пару множеств M и $-M$ можно представить в виде ожерелья из равного количества черных и белых бусинок, в котором при повороте на 180 градусов меняются цвета всех бусинок. Если $M \in A_{n,m}$, то это ожерелье будет $2n/m$ -периодическим. Эквивалентным множествам соответствуют ожерелья, получающиеся друг из друга вращениями. Если такие ожерелья считать одинаковыми, то каждому классу эквивалентности соответствует одно ожерелье и число классов эквивалентности равно числу различных ожерелий. Если множества M и M_1 эквивалентны, то соответствующие им многоугольники Рейнхардта. получаются друг из друга поворотами, т.е. равны. Очевидно, что не эквивалентным множествам соответствуют не равные друг другу многоугольники Рейнхардта.

Ясно, что существует множество $M \in A_{n,1}$ со свойством $\sum_{\epsilon^i \in M} \epsilon^i \neq 0$ (например, множество $\{1, \epsilon, \dots, \epsilon^{n-1}\}$). Поэтому

$$R(n) < \sum_{m|n_0} |A_{n,m}| \frac{m}{2n} = \sum_{m|n_0} |A_{\frac{n}{m},1}| \frac{m}{2n} = \frac{1}{2n} \sum_{m|n_0} m \sum_{k|\frac{n_0}{m}} 2^{\frac{n}{mk}} \mu(k),$$

так как $n/m = 2^s n_0/m$. Меняя порядок суммирования и подставляя $k = l/m$, имеем

$$R(n) < \frac{1}{2n} \sum_{l|n_0} 2^{n/l} \sum_{m|l} m \mu(l/m) = \frac{1}{2n} \sum_{l|n_0} 2^{n/l} \varphi(l),$$

так как

$$\sum_{m|l} m\mu(l/m) = \varphi(l).$$

Так как разным ожерельям соответствуют разные n -угольники Рейнхардта, то

$$\begin{aligned} R(n) &\geq \sum_{1 < m|n_0} |A_{n,m}| \frac{m}{2n} = \sum_{m|n_0} |A_{n,m}| \frac{m}{2n} - \frac{A_{n,1}}{2n} = \\ &= \frac{1}{2n} \sum_{l|n_0} 2^{n/l} (\varphi(l) - \mu(l)) = \frac{1}{2n} \sum_{2|m|n} 2^{n/m} (\varphi(m) - \mu(m)) \end{aligned}$$

и соотношения (ii) доказаны.

Заметим, что при нечетном n

$$\sum_{1 < m|n_0} |A_{n,m}| \frac{m}{2n} = \sum_{1 < m|n} |A_{n/m,1}| \frac{m}{2n}$$

равна половине числа всех периодических двухцветных ожерель из n бусинок.

Пусть $n = 2^s p^k$, $s, k = 0, 1, \dots$, где p простое число, $M \in A_n$ и

$$\sum_{\varepsilon^i \in M} \varepsilon^i = 0.$$

Подставляя $-\varepsilon^{i-n}$ вместо ε^i при $i \geq n$ в предыдущее равенство, имеем

$$\sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i \varepsilon^i = 0,$$

где $\alpha_i = \pm 1$, $i = 0, \dots, n-1$. При этом ясно, что

$$\alpha_i = 1 \Leftrightarrow \varepsilon^i \in M, \alpha_i = -1 \Leftrightarrow \varepsilon^i \in (-M).$$

Пусть

$$P(x) = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i x^i,$$

и f_{2n} есть полином деления круга (определение и свойства см. в [36]). Тогда $P(\varepsilon) = 0$, и так как f_{2n} минимальный полином для ε , то согласно свойству минимальных полиномов он будет делителем полинома $P(x)$. Если $p = 2$, то $n = 2^l$, следовательно $f_{2n} = x^n + 1$ и поэтому $f_{2n}(x)$ не может делить $P(x)$, так как степень $P(x)$ меньше n . Следовательно, $R(n) = 0$ и равенство (i) доказано.

Рассмотрим случай $p > 2, n = 2^s p^k$. Для круговых полиномов известны соотношения

$$f_p(x) = 1 + x + \dots + x^{p-1}; \quad f_{2p}(x) = f_p(-x) = 1 - x + x^2 - \dots + x^{p-1};$$

$$f_n(x) = f_{p_1 \dots p_s} \left(x^{p_1^{r_1-1} \dots p_s^{r_s-1}} \right),$$

где $n = p_1^{r_1} \dots p_s^{r_s}$. Из них следует, что

$$f_{2n} = 1 - x^{n/p} + x^{2n/p} - \dots + x^{n(1-1/p)}, \quad n = 2^s p^k.$$

Так как

$$\frac{P(x)}{f_{2n}(x)} = \sum_{i=0}^{\frac{n}{p}-1} a_i x^i,$$

где a_i — целые числа, то

$$P(x) = f_{2n}(x) \frac{P(x)}{f_{2n}(x)} = f_{2n}(x) \sum_{i=0}^{\frac{n}{p}-1} a_i x^i = \sum_{i=0}^{\frac{n}{p}-1} \sum_{j=0}^{p-1} (-1)^j x^{\frac{n}{p}j+i}.$$

Отсюда следует, что последовательность a_i антипериодична с периодом n/p , т.е. $a_{i+n/p} = -a_i, i = 0, \dots, n-1-n/p$. Так как

$$a_i = 1 \Leftrightarrow \varepsilon^i \in M, a_i = -1 \Leftrightarrow \varepsilon^i \in (-M),$$

то

$$\varepsilon^i \in M \Leftrightarrow \varepsilon^{i+\frac{n}{p}} \in (-M), i = 0, \dots, n-1-n/p,$$

следовательно $\varepsilon^i \in M \Leftrightarrow \varepsilon^{i+\frac{2n}{p}} \in M, i = 0, \dots, 2n-1$, ведь $\varepsilon^{i+n} = -\varepsilon^i$. Поэтому $\varepsilon^{2n/p} \in \text{Aut } M, |\text{Aut } M| > 1$, значит $M \notin A_{n,1}$ и множество $A_{n,1}$ пусто. Следовательно,

$$R(n) = \sum_{1 \leq m|n_0} |A_{n,m}| \frac{m}{2n} = \frac{1}{2n} \sum_{2 \nmid m|n} 2^{n/m} (\varphi(m) - \mu(m))$$

и равенство (iii) доказано. В частности, $R(n) = 1$, если $n = p$ или $n = 2p$, где $p > 2$ — простое число. Если $n = 2^s p$, $s \geq 2$, тогда согласно (iii)

$$\begin{aligned} R(n) &= \frac{1}{2n} \sum_{2|m|n} 2^{n/m} (\varphi(m) - \mu(m)) = \frac{1}{2n} 2^{n/p} (\varphi(p) - \mu(p)) = \\ &= \frac{1}{2^{s+1}} 2^{2^s} = 2^{2^s - s - 1} \geq 2, \end{aligned}$$

так как $2^s \geq s + 2$ для $s \geq 2$.

Если $1 < p \leq \sqrt{n}$ делит n , то для $n > 4$

$$\begin{aligned} R(n) &\geq \frac{1}{2n} \sum_{2|m|n} 2^{n/m} (\varphi(m) - \mu(m)) > \frac{1}{2n} 2^{n/p} (\varphi(p) - \mu(p)) = \\ &= \frac{1}{2n} 2^{n/p} (p - 1 + 1) = \frac{p}{2n} 2^{n/p} \geq 2^{\sqrt{n}-1} / \sqrt{n} \geq 1, \end{aligned}$$

так как $2^x/x$ возрастающая функция при $x \geq 2$, и $2\sqrt{n} \geq 2\sqrt{n}$ при $n \geq 4$. Следовательно, $R(n) = 1$ только когда n простое число, и пункт (iv) доказан.

Доказанная теорема дает примеры многоугольников Рейнхардта, которые нельзя получить из правильных $2k+1$ -угольников Рело. Это очевидно при сравнении полученных нижних оценок для $R(n)$ и оценки $\tau(n_0)$ числа n -угольников Рейнхардта-Рело. Если n не равно ни степени двойки, ни простому, ни удвоенному простому числу, то из доказанных неравенств следует асимптотическое неравенство $2^{n/p} p / 2n \lesssim R(n)$, где p — минимальный нечетный простой делитель n . Из него следует, что $\tau(n_0) \leq \tau(n) \leq 2\sqrt{n} \lesssim 2^{\sqrt{n}-1} / \sqrt{n} \lesssim R(n)$, т.е. $R(n)$ в рассматриваемых случаях растет существенно быстрее $\tau(n)$. Минимальное значение n , при котором $R(n) > \tau(n_0)$, равно 15. В этом случае

$$R(15) \geq \frac{2^5 3 + 2^3 5 + 2(2 \cdot 4 - 1)}{30} = 5.$$

Из 5 этих 15-угольников один правильный и еще два нам уже известны как 15-угольники Рейнхардта-Рело, один из которых

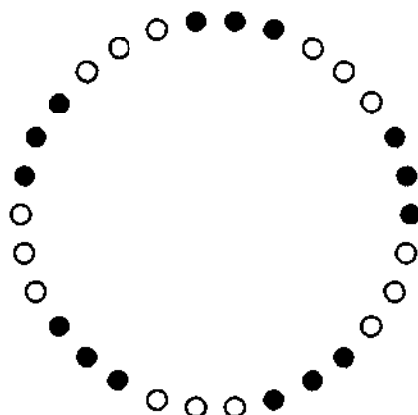


Рис. 2.1: 5-периодическое ожерелье для 15-угольника Рейнхардта

строится на базе 5-угольника, а другой — на базе треугольника Рело. Покажем для примера, как описанный в доказательстве метод позволяет построить еще два многоугольника Рейнхардта с нетривиальной группой вращений. Вначале рассмотрим случай когда эта группа содержит 15 вращений. Тогда очевидно существует только правильный 15-угольник Рейнхардта. Если группа содержит 5 вращений, то соответствующее множество M может иметь только вид

$$\{1, \epsilon, \epsilon^2, \epsilon^6, \epsilon^7, \epsilon^8, \epsilon^{12}, \epsilon^{13}, \epsilon^{14}, \epsilon^{18}, \epsilon^{19}, \epsilon^{20}, \epsilon^{24}, \epsilon^{25}, \epsilon^{26}\}$$

и соответствует 5-периодическому ожерелью, изображенному на рис. 2.1. В рассматриваемом случае 15-угольник можно построить на базе пятиугольника Рело.

Если группа содержит 3 вращения, то множество M может совпадать с множеством

$$\{1, \epsilon, \epsilon^2, \epsilon^3, \epsilon^4, \epsilon^{10}, \epsilon^{11}, \epsilon^{12}, \epsilon^{13}, \epsilon^{14}, \epsilon^{20}, \epsilon^{21}, \epsilon^{22}, \epsilon^{23}, \epsilon^{24}\}$$

которое соответствует 3-периодическому ожерелью, изображенному на рис. 2.2. В этом случае 15-угольник можно построить на базе треугольника Рело. Однако множество M можно выбрать

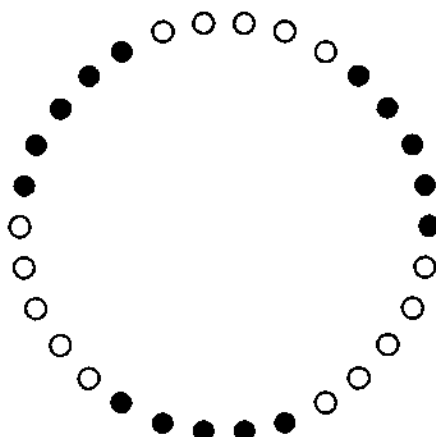


Рис. 2.2: 3-периодическое ожерелье для 15-угольника Рейнхардта

еще двумя способами. Один из них соответствует множеству

$$\{1, \epsilon, \epsilon^2, \epsilon^4, \epsilon^8, \epsilon^{10}, \epsilon^{11}, \epsilon^{12}, \epsilon^{14}, \epsilon^{18}, \epsilon^{20}, \epsilon^{21}, \epsilon^{22}, \epsilon^{24}, \epsilon^{28}\},$$

которое изображается 3-периодическим ожерельем на рис. 2.3. Соответствующий пятнадцатиугольник Рейнхардта изображен на рис. 2.4. Во втором случае в качестве M выбирается множество

$$\{1, \epsilon, \epsilon^3, \epsilon^4, \epsilon^7, \epsilon^{10}, \epsilon^{11}, \epsilon^{13}, \epsilon^{14}, \epsilon^{17}, \epsilon^{20}, \epsilon^{21}, \epsilon^{23}, \epsilon^{24}, \epsilon^{27}\},$$

которое изображается 3-периодическим ожерельем на рис. 2.5. Соответствующий пятнадцатиугольник Рейнхардта изображен на рис. 2.6.

Недавно в [82], по-видимому, независимо от [21, 22] исследован вопрос о числе экстремальных многоугольников Рейнхардта с точностью до поворотов и осевых симметрий. Число таких n -угольников, обладающих, как и в наших рассмотрениях выше, свойством периодичности, в [82] обозначено $E_0(n)$, а общее число всех таких n -угольников (в том числе и не обладающих свойством периодичности) обозначено $E(n)$. Выше было фактически показано, что

$$E(n) = 0 \iff n = 2^k, \quad k \in \mathbb{N},$$

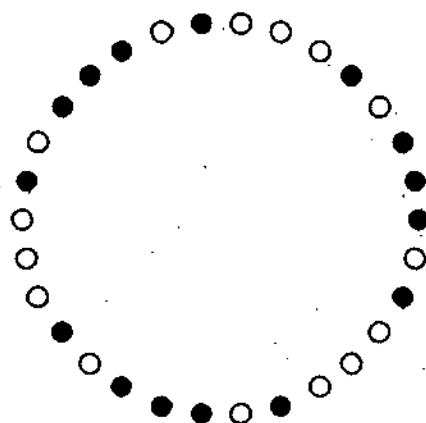


Рис. 2.3: Еще одно 3-периодическое ожерелье для 15-угольника Рейнхардта

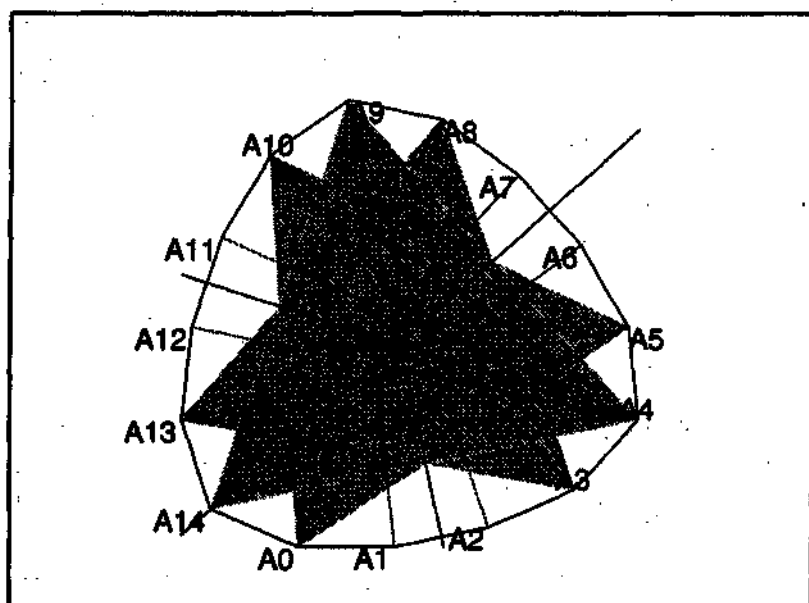


Рис. 2.4: Пятнадцатигульник Рейнхардта

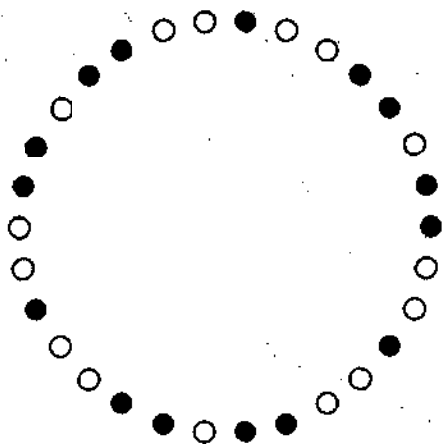


Рис. 2.5: Третье 3-периодическое ожерелье для 15-угольника Рейнхардта

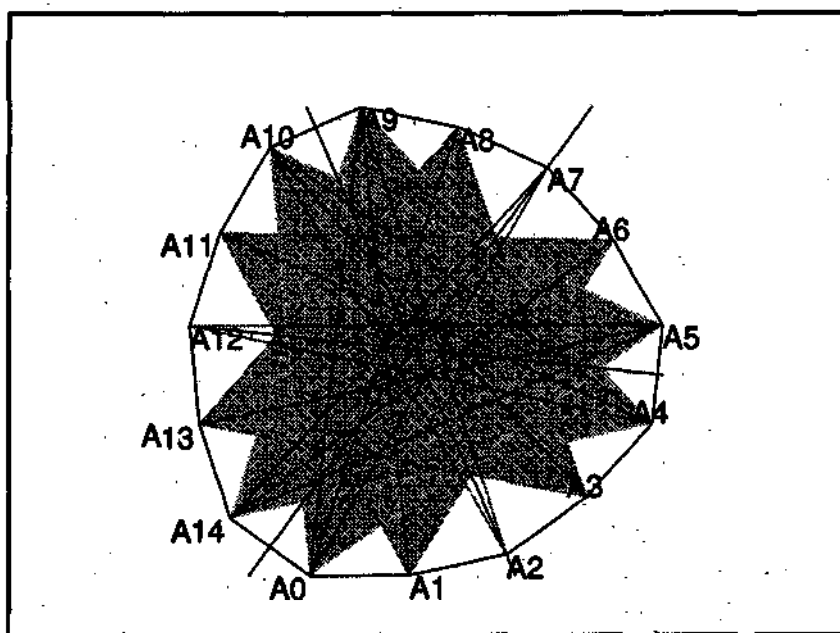


Рис. 2.6: Другой пятинадцатигульник Рейнхардта

$$E(n) = 1 \iff n = p \text{ или } n = 2p, p > 2, p - \text{простое.}$$

В [82] (в дополнение к теореме 13) доказана

Теорема 16. Для любого $n \in \mathbb{N}$, $n \neq 2^k$,

$$E_0(n) = \sum_{1 < d = (2k+1)|n} (-\mu(d))D(n/d),$$

где

$$D(m) = 2^{\lfloor (m-3)/2 \rfloor} + \frac{1}{4m} \sum_{2|d|m} 2^{m/d} \varphi(d),$$

в частности, если p — минимальный простой нечетный делитель n , то

$$E_0(n) \sim \frac{p}{4n} 2^{n/p},$$

для $n = 2^l p^k$, $k, l \in \mathbb{N}$, где $p > 2$ — простое число,

$$E(n) = D\left(\frac{n}{p}\right) = 2^{\lfloor \frac{n-3p}{2p} \rfloor} + \frac{p}{4n} \sum_{2|m|\frac{n}{p}} 2^{\frac{n}{mp}} \varphi(m).$$

Кроме того, в [82] путем исчерпывающего машинного поиска найдены некоторые непериодические (названные в [82] спорадическими) экстремальные n -угольники Рейнхардта. Минимальное n , при котором они существуют, равно 30, и таких спорадических 30-угольников ровно 3.

Укажем для примера один из них. Чтобы его найти, согласно рассуждениям из доказательства теоремы 15, достаточно найти множество $M \subset W_{60} = \{1, \epsilon, \dots, \epsilon^{59}\}$, $\epsilon^{60} = 1$, состоящее из 30 векторов, выбранных среди 60 векторов с началом в начале координат, концы которых образуют правильный 60-угольник, таким образом, чтобы среди выбранных 30 векторов не было попарно противоположных, и их сумма была равна нулю, причем это множество должно порождать непериодическое ожерелье. В качестве такого непериодического множества можно взять (см. рис. 2.7)

$$\{1, \epsilon, \epsilon^2, \epsilon^3, \epsilon^4, \epsilon^5, \epsilon^6, -\epsilon^7, -\epsilon^8, -\epsilon^9, -\epsilon^{10}, -\epsilon^{11}, -\epsilon^{12}, \epsilon^{13}, -\epsilon^{14}, \epsilon^{15},$$

$$-\epsilon^{16}, \epsilon^{17}, \epsilon^{18}, -\epsilon^{19}, \epsilon^{20}, -\epsilon^{21}, \epsilon^{22}, -\epsilon^{23}, \epsilon^{24}, \epsilon^{25}, \epsilon^{26}, \epsilon^{27}, -\epsilon^{28}, \epsilon^{29}\}$$

(в этой записи использовалось тождество $\epsilon^i = -\epsilon^{30+i}$, $i = 0, \dots, 29$) и проверить, что

$$\begin{aligned} 1 + \epsilon + \epsilon^2 + \epsilon^3 + \epsilon^4 + \epsilon^5 + \epsilon^6 - \epsilon^7 - \epsilon^8 - \epsilon^9 - \epsilon^{10} - \epsilon^{11} - \epsilon^{12} + \epsilon^{13} - \epsilon^{14} + \epsilon^{15} - \\ - \epsilon^{16} + \epsilon^{17} + \epsilon^{18} - \epsilon^{19} + \epsilon^{20} - \epsilon^{21} + \epsilon^{22} - \epsilon^{23} + \epsilon^{24} + \epsilon^{25} + \epsilon^{26} + \epsilon^{27} - \\ - \epsilon^{28} + \epsilon^{29} = 0. \end{aligned}$$

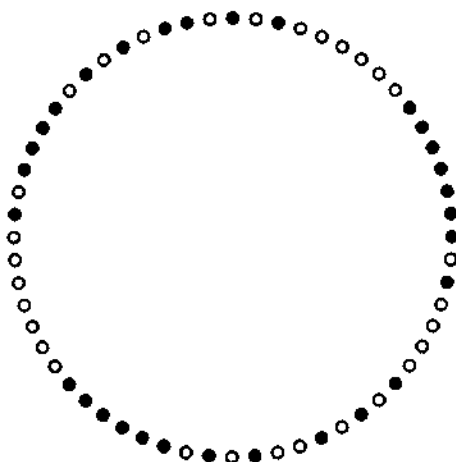


Рис. 2.7: Непериодическое ожерелье для 30-угольника Рейнхардта

Непосредственно это сделать затруднительно, но можно непосредственно проверить, что

$$\begin{aligned} & (x^{13} - x^{12} + 2x^{10} + x^9 - x^8 - x^7 + x^6 + x^5 + x^4 + x + 1) \cdot \\ & \cdot (1 + x^2 - x^6 - x^8 - x^{10} + x^{14} + x^{16}) = \\ & = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 - x^7 - x^8 - x^9 - x^{10} - x^{11} - x^{12} + x^{13} - x^{14} + \\ & + x^{15} - x^{16} + x^{17} + x^{18} - x^{19} + x^{20} - x^{21} + x^{22} - x^{23} + x^{24} + x^{25} + x^{26} + \end{aligned}$$

$$+x^{27} - x^{28} + x^{29},$$

и заметить, что $1 + \epsilon^2 - \epsilon^6 - \epsilon^8 - \epsilon^{10} + \epsilon^{14} + \epsilon^{16} = 0$, так как

$$0 = (\epsilon^{30} + 1)(\epsilon^2 + 1) = (\epsilon^6 + 1)(\epsilon^{10} + 1)(1 + \epsilon^2 - \epsilon^6 - \epsilon^8 - \epsilon^{10} + \epsilon^{14} + \epsilon^{16}),$$

$$\epsilon^6 + 1 \neq 0, \epsilon^{10} + 1 \neq 0.$$

Непериодический 30-угольник Рейнхардта, соответствующий ожерелью рис. 2.7, изображен на рис. 2.8. Кроме сторон, на нем показаны также его диаметры.

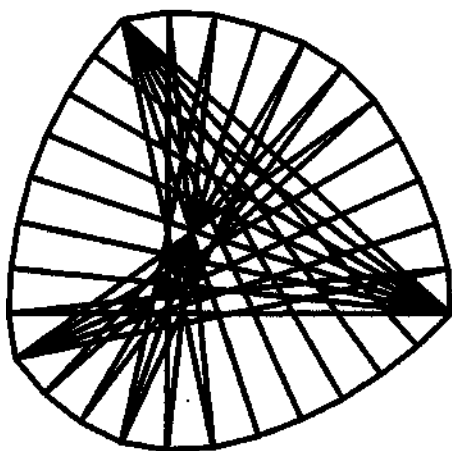


Рис. 2.8: Непериодический 30-угольник Рейнхардта, соответствующий ожерелью рис. 2.7

Следующее значение n , при котором спорадические n -угольники Рейнхардта существуют, равно 42, и их ровно 9. Для поиска спорадических n -угольников в [82] использовался метод, указанный в [83], а именно искались «непериодические» многочлены с нечетным числом одночленов, единичным свободным членом, коэффициентами $0, \pm 1$ и степени, меньшей n , нацело делящиеся на круговой многочлен f_{2n} . Используя подход, указанный в теореме 15, с той же целью можно искать «непериодические» многочлены степени $n - 1$ с коэффициентами ± 1 , делящиеся на f_{2n} , как это было показано выше.

В [82] дана таблица чисел sporadических n -угольников до $n = 286$ и высказана гипотеза, что их не существует при n , равном произведению двух простых нечетных чисел. Эта гипотеза впоследствии была доказана в [81]. Также в [81] было доказано существование sporadических n -угольников Рейнхардта при любом $n = pqr$, где p, q — различные простые нечетные числа, а $r \geq 2$ — произвольное число. Тот факт, что sporadических n -угольников Рейнхардта не существует при $n = 2^k p^l$, где p — нечетное простое, фактически доказан выше в теореме 15.

2.7 Изопериметрические неравенства для выпуклых фигур

После многочисленных задач, касающихся различных изопериметрических свойств выпуклых n -угольников, было бы непоследовательно не коснуться аналогичных свойств для произвольных выпуклых фигур. К сожалению эта красивая тема не совсем элементарна уже потому, что в ней задействовано не совсем элементарное понятие площади произвольной выпуклой фигуры и длины ее границы. Далее мы попытаемся, не вдаваясь в тонкости теории измерения площади и длины произвольных фигур и кривых линий, дать читателю представление о некоторых интересных фактах из теории изопериметрии.

Начнем с замечания о том, что изопериметрические неравенства можно вывести из соответствующих неравенств для многоугольников с помощью предельного перехода и, например, следующей теоремы.

Теорема 17. *Произвольную ограниченную выпуклую фигуру можно заключить между сколь угодно тесно расположенными подобными выпуклыми многоугольниками (т.е. для любой выпуклой фигуры M и любого ϵ , $0 < \epsilon < 1$, можно найти содержащий M выпуклый многоугольник V , такой, что подобный ему с коэффициентом $1 - \epsilon$ будет содержаться в M).*

Полезной в таких рассуждениях также является следующая

Теорема 18 (Бляшке). Если последовательность N -угольников $M_n = P_1^n \dots P_N^n$ равномерно ограничена (например, все они лежат в одном и том же квадрате K), то из нее можно выбрать подпоследовательность $Q_k = M_{n_k}$, такую, что существует предельный m -угольник M , у которого $m \leq N$, и для любого $\epsilon > 0$ найдется такое число L , что для любого $k > L$ каждая точка границы фигуры Q_k удалена не более чем на ϵ от какой-то (например ближайшей к ней) граничной точки фигуры M и наоборот, любая точка границы M удалена не более чем на ϵ от некоторой граничной точки фигуры Q_k .

Теорема Бляшке может быть доказана и для равномерно ограниченной последовательности выпуклых фигур.

Доказательство теоремы, как видно уже по формулировке, существенно использует строгую теорию пределов, и поэтому здесь не приводится. Желаящие с ним ознакомятся читатели адресуются к [77, 9].

❖ 344. Докажите, что предел последовательности выпуклых N -угольников является выпуклым m -угольником, у которого $m \leq N$.

❖ 345. Докажите, что периметр предельной фигуры является пределом периметров $p(Q_k)$, а площадь является пределом площадей $s(Q_k)$.

Следующую теорему можно вывести из ее варианта для выпуклых n -угольников (теорема 11), но можно доказать и непосредственно, однако это доказательство непростое. Тот, кто им заинтересуется, может прочитать его в [69, 73]. Напомним, что здесь P — это *полупериметр*.

Теорема 19 (Секефальви-Надь). Для произвольной выпуклой фигуры справедливы неравенства

$$s \leq \frac{1}{\pi}(P^2 - (P - \pi r)^2).$$

☉ 346. Выведите из этой теоремы, что среди фигур данного периметра наибольшую площадь имеет круг (изопериметрическая теорема Штейнера).

Справедлива также следующая

Теорема 20 (Боннезен). Для произвольной выпуклой фигуры справедливы неравенства

$$P^2 - \pi s \geq \frac{\pi^2}{4}(R - r)^2, \quad P^2 - \pi s \geq s^2 \left(\frac{1}{2r} - \frac{1}{2R} \right)^2,$$

$$P^2 - \pi s \geq P^2 \left(\frac{R - r}{R + r} \right)^2, \quad \frac{P - \sqrt{P^2 - \pi s}}{\pi} \leq r \leq R \leq \frac{P + \sqrt{P^2 - \pi s}}{\pi}.$$

Эта теорема также является уточнением изопериметрического неравенства.

☉ 347. Проверьте, что последнее неравенство теоремы Боннезена равносильно тому, что при всех t из отрезка $[r, R]$ квадратный трехчлен $\pi t^2 - 2Pt + s \leq 0$. Выведите отсюда, что

$$\sqrt{P^2 - \pi s} \geq \frac{s}{r} - P, \quad \sqrt{P^2 - \pi s} \geq P - \frac{s}{R},$$

а также первые три неравенства теоремы Боннезена.

☉ 348. Проверьте, что неравенство

$$R \leq \frac{P + \sqrt{P^2 - \pi s}}{\pi}$$

равносильно неравенству

$$s \leq \frac{1}{\pi}(P^2 - (P - \pi R)^2).$$

☉ 349**. Докажите неравенство

$$s \leq \frac{1}{\pi}(P^2 - (P - \pi R)^2).$$

Указание. Предполагаем, что фигура M является многоугольником, ограниченным ломаной γ . Рассмотрим его R -окрестность $M(R)$. Согласно формуле Штейнера (задача 235) ее площадь

$$s(R) = s + 2PR + \pi R^2.$$

Рассмотрим R -окрестность $\gamma(R)$ ломаной γ . Множество $\gamma(R)$ распадается на подмножества E_k , состоящие из тех точек x , для которых окружность с центром x и радиусом R пересекает γ ровно в k точках. Проверьте, что площадь $s(E_k) = 0$ при нечетных k , а также индукцией по числу звеньев ломаной γ докажите, что

$$2s(E_2) + 4s(E_4) + \dots = 8RP.$$

Так как

$$\begin{aligned} s(M(R)) &= s(E_2) + 2s(E_4) + 3s(E_6) + \dots \leq \\ &\leq \frac{1}{2}(2s(E_2) + 4s(E_4) + \dots) \leq 4RP, \end{aligned}$$

то $s + 2PR + \pi R^2 \leq 4RP$.

Для решения изопериметрической задачи Штейнер предложил красивый прием, который называется четырехшарнирный метод Штейнера. Далее мы его один раз применим, но показывать, как решается с его помощью изопериметрическая проблема, не будем, так как это подробно изложено во многих книгах, например [9, 37, 38, 59, 56] (в них же объясняется, почему этот сам по себе простой метод нуждается в непростых дополнительных обоснованиях).

Далее будет изложен другой классический метод Штейнера доказательства изопериметрической теоремы, совершенно строгий, который интересен еще и тем, порождает множество интересных задач, и имеет много приложений.

2.8 Симметризация по Штейнеру

Симметризацией по Штейнеру выпуклой фигуры называется ее симметризация относительно любой данной оси. Выполняется

она следующим образом. Рассмотрим семейство прямых, перпендикулярных данной оси. Каждая из них пересекается с фигурой по некоторому отрезку или вообще не пересекается. Переместим каждый из этих отрезков вдоль соответствующей прямой так, чтобы он стал симметричным относительно данной оси (другими словами, делился ей пополам). Объединение полученных отрезков и называется симметризацией данной фигуры относительно данной оси. Все следующие утверждения справедливы для любой выпуклой фигуры, но нам они понадобятся только для многоугольников.

☉ 350. Докажите, что при симметризации Штейнера площадь фигуры не меняется.

☉ 351. Докажите, что при симметризации Штейнера относительно оси симметрии фигуры сама фигура не меняется.

☉ 352. Докажите, что при симметризации Штейнера центрально-симметричная фигура остается центрально-симметричной.

☉ 353. Докажите, что при симметризации Штейнера n -угольник превращается в симметричный относительно прямой выпуклый m -угольник, $m \leq 2n$, той же площади и не большего периметра.

Указание. Примените задачу 163.

☉ 354. Докажите, что при симметризации Штейнера внутренний радиус не уменьшается, а внешний — не увеличивается.

☉ 355. Докажите, что при симметризации Штейнера правильного треугольника относительно его стороны получается ромб, при этом внутренний радиус в $3/\sqrt{7}$ раз возрастает, а внешний радиус в $\sqrt{3}/2$ раз убывает.

☉ 356. Докажите, что при симметризации Штейнера диаметр не увеличивается, а если симметризацию выполнить относитель-

но диаметра, то он не изменится, а n -угольник превращается в m -угольник, $m \leq 2n - 2$.

☞ 357. Докажите, что при симметризации Штейнера внутренний радиус и ширина могут возрасти в любое число раз, а внешний радиус, диаметр и периметр — уменьшится в любое число раз.

Указание. Выполнить симметризацию длинного прямоугольника относительно подходящей оси.

☞ 358. Докажите, что если симметризацию Штейнера последовательно выполнить относительно перпендикулярных осей, то n -угольник превращается в центрально-симметричный m -угольник, $m \leq 4n$. Если в качестве первой оси выбрать диаметр n -угольника, то он превратится в m -угольник, $m \leq 4n - 8$, того же диаметра.

Теоремы округления

Следующее далее доказательство изопериметрического свойства круга следует идеям Штейнера и принадлежит немецкому математику Эдлеру.

☞ 359. Докажите, что если две оси симметрии многоугольника образуют угол $\pi/2^k$, то они пересекаются в его центре симметрии.

Указание. Если выполнить друг за другом преобразования зеркального отражения относительно этих осей, то получится поворот на угол $\pi/2^{k-1}$ с центром в точке пересечения осей, переводящий многоугольник в себя. Повторяя этот поворот 2^{k-1} раз, получим центральную симметрию. На самом деле ограничение многоугольниками и углами специального вида несущественно.

☞ 360. (Эдлер) Докажите, что если выпуклый n -угольник имеет $2^k \leq n$ осей симметрии, являющихся в нем диагоналями, причем соседние оси образуют равные углы между собой, то можно, не меняя его периметра, и не уменьшая площадь, преобразовать

его так, что все указанные оси симметрии, сохраняя свои направления, станут равными.

Указание. Для каждого из секторов, на которые разбивается n -угольник соседними осями симметрии выравнять боковые стороны сектора, так, что при это не изменится хорда сектора и соответственно стягиваемая ей часть периметра n -угольника, после чего применить задачу 42.

❧ 361. (Эдлер) Докажите, что если n -угольник имеет $2^k \leq n$ осей симметрии, являющихся в нем равными диагоналями, причем соседние оси образуют равные углы между собой, то можно, не меняя указанных осей симметрии и площади n -угольника, преобразовать его так, что у него периметр не увеличится и появятся еще 2^k осей симметрии, делящих пополам углы между старыми осями.

Указание. К каждому из секторов, на которые разбивается n -угольник соседними осями симметрии, применить симметризацию Штейнера относительно биссектрисы угла при вершине этого сектора.

❧ 362. (Эдлер) Докажите, что применяя последовательно приемы, указанные в предыдущих двух задачах, и повторяя это не более 2^{n-1} раз, можно n -угольник превратить в 2^k -угольник, $k \leq n-1$, у которого площадь не уменьшится, периметр не увеличится, и каждая из диагоналей, проходящих через его центр симметрии, будет осью симметрии, и углы между соседними диагоналями. будут равны.

❧ 363. (Эдлер) Докажите, что для любого неправильного n -угольника можно построить правильный 2^k -угольник, $k \leq n-1$, той же площади и большего периметра.

❧ 364. Докажите, что у любого n -угольника площадь меньше, чем у круга того же периметра.

Следующая теорема интуитивно достаточно очевидна.

Теорема 21 (Приближение фигуры n -угольниками). Для любого $\epsilon > 0$ в ограниченную замкнутую выпуклую фигуру можно

вписать равносторонний четырехугольник, у которого периметр и площадь отличаются не более чем на ϵ от периметра и площади данной фигуры.

Теперь все готово, чтобы читатель сам провел доказательство следующей теоремы.

Теорема 22 (Изопериметрическая теорема). Среди всех фигур данными периметром наибольшую площадь имеет круг.

Обратим внимание, что в условии теоремы не сказано, что фигура выпуклая, так как теорема верна для любой ограниченной фигуры, потому, что выпуклая оболочка любой ограниченной фигуры имеет большую площадь и меньший периметр, чем исходная фигура.

Еще одно доказательство (которое можно провести и в пространственном случае), можно получить, решив следующие задачи.

❖ **365***. Докажите, что если две оси симметрии ограниченной выпуклой фигуры образуют угол $\alpha\pi$, где α — иррациональное число, то эта фигура — круг.

Рассмотрим последовательность многоугольников M_n , получающуюся поочередным выполнением операций симметризации относительно двух осей, образующих угол $\alpha\pi$, где α — иррациональное число. В этой последовательности многоугольники с четными номерами симметричны относительно одной оси, а многоугольники с нечетными номерами — относительно другой.

❖ **366***. Центр тяжести симметризации данной фигуры является проекцией центра тяжести этой фигуры на ось симметризации.

Указание. Центр тяжести симметричной фигуры лежит на оси симметрии. При выполнении симметризации центр тяжести может сдвинуться только в направлении перпендикулярном оси симметризации.

❖ **367***. Предел последовательности центров тяжести данной последовательности фигур совпадает с центром тяжести предельной фигуры этой последовательности.

Следующую классическую теорему читатель может найти в любом достаточно полном учебнике математического анализа.

❶ 368*. (Вейерштрасс) Монотонная ограниченная последовательность имеет предел.

До того, как Вейерштрасс сформулировал и доказал ее, теорема многим казалась очевидной.

❶ 369. Если любая сходящаяся подпоследовательность последовательности фигур M_n имеет одну и ту же предельную фигуру, значит и вся последовательность M_n имеет ту же предельную фигуру.

Теорема 23 (Шварца об округлении). *Пределом определенной выше последовательности фигур равной площади является круг той же площади. Диаметр его не превосходит диаметра исходной фигуры.*

Эскиз доказательства.

Так как периметры и диаметры фигур в последовательности не возрастали, то существует предел их периметров p , предел их диаметров d , которые очевидно совпадают с пределами для любой подпоследовательности фигур. Выберем из данной последовательности любую сходящуюся подпоследовательность (их существование гарантирует теорема выбора Бляшке) и рассмотрим ее предельную фигуру. Если выбранная подпоследовательность содержит бесконечно много как четных, так и нечетных чисел, то с одной стороны, ее предельная фигура совпадает с пределом четной подпоследовательности, поэтому она имеет ось симметрии, совпадающую с одной из данных осей, а с другой стороны, она симметрична и относительно другой оси, а поэтому является кругом K той же площади, что и исходная фигура, и с центром в точке пересечения осей, т.е. все такие подпоследовательности имеют общую предельную фигуру.

Если же рассматриваемая подпоследовательность содержит только конечное число членов с номерами данной четности, то выкидывая из нее несколько начальных фигур, получаем последовательность фигур, предел которой L симметричен относи-

тельно одной из осей, и его периметр равен пределу периметров фигур рассматриваемой подпоследовательности, т.е. $p(L) = p$. Симметризуем все фигуры данной последовательности относительно второй оси и рассмотрим предельную фигуру M , которая будет получаться путем симметризации фигуры L относительно второй оси (этот факт надо тоже доказывать!) Периметр фигуры M поэтому равен пределу периметров фигур в подпоследовательности с номерами другой четности, который, как было сказано в начале, также равен $p(L) = p$. Но если при симметризации периметр не уменьшился, то фигура L должна быть симметричной относительно и прямой l , параллельной второй оси. Докажем, что l совпадает со второй осью. Действительно, из задачи 366 следует, что центры тяжести фигур рассматриваемой последовательности поочередно лежат на двух осях и получают-ся последовательным проектированием друг из друга, поэтому их предел совпадает с точкой пересечения осей, значит, согласно 367, центр тяжести фигуры L совпадает с этой точкой (центром круга K), но так как он должен лежать и на прямой l , то она совпадает со второй осью. Поэтому L имеет две данные оси симметрии и следовательно будет кругом, концентричным с K и имеющим ту же площадь, т.е. совпадающим с ним. Таким образом доказано, что любая сходящаяся подпоследовательность M_n имеет одну и ту же предельную фигуру, значит и вся последовательность M_n имеет ту же предельную фигуру.

Следующая теорема уже встречалась нам в частном случае.

Теорема 24 (Крамер). *Среди всех выпуклых n -угольников с данными сторонами наибольшую площадь имеет вписанный в окружность.*

Доказательство можно провести *четырёхшарнирным методом Штейнера*. Рассмотрим вписанный в круг n -угольник с данными сторонами и отрезем от круга сегменты сторонами n -угольника. Возьмем произвольный выпуклый n -угольник с данными сторонами и к каждой его стороне приклеим подходящий сегмент. Полученная фигура имеет такой же периметр, что и данный круг. Площадь ее равна сумме площадей сегмен-

тов и данного n -угольника. Согласно изопериметрической теореме эта площадь меньше площади данного круга. Отнимая от нее сумму площадей сегментов, получаем, что площадь данного n -угольника меньше площади вписанного в данный круг n -угольника с теми же сторонами.

Еще одно доказательство можно найти в [13]

❖ **370.** Если одна выпуклая фигура содержит другую, то площадь и периметр объемлющей фигуры больше.

Интересным аналогом изопериметрической теоремы является следующая теорема, принадлежащая известному немецкому математику Бибербаху.

Теорема 25 (Бибербах). Среди всех фигур с данным диаметром наибольшую площадь и наибольший периметр имеет круг. Среди всех фигур с данной площадью или данным периметром наименьший диаметр имеет круг.

Доказательство. Второе утверждение равносильно первому. Докажем его. Можно считать, что фигура выпуклая. Рассмотрим ее симметризацию Минковского. Диаметр d и периметр p при этом не изменятся, площадь не уменьшится, а так как фигура стала центрально-симметричной, то она лежит в круге диаметра d , поэтому ее площадь не больше $\pi d^2/4$, а периметр $p \leq \pi d$. Равенства возможны только когда симметризация есть круг. Согласно изопериметрической теореме равенство для площади возможно только в случае круга. Равенство для периметра возможно только для фигур постоянной ширины (о них см. в разделе 2.10).

Так как свойство монотонности площади при симметризации Минковского еще не было доказано, то приведем второе доказательство (только для площади). Сделаем симметризацию Штейнера последовательно относительно перпендикулярных осей, выбрав в качестве первой оси диаметр фигуры, тогда она, не изменив площадь и диаметр, станет центрально-симметричной, и поэтому будет лежать в круге диаметра d , поэтому площадь ее не больше $\pi d^2/4$, причем равенство возможно лишь когда симметризация есть круг, т.е. когда исходная фигура есть круг.

Третье доказательство для площади легко получить из теоремы Шварца об округлении (без условия равенства).

Еще одно очень короткое доказательство этой теоремы можно прочесть в [41, 66]. Но оно использует интегральное исчисление.

2.9 «Задача Дидоны»

Согласно древнему мифу, следующая задача возникла перед высадившейся на африканский берег легендарной финикийской царицей Дидоной, когда местные племена разрешили ей занять столько земли, сколько может накрыть бычья шкура.

❖ 371. (Задача Дидоны) Отгородить от прямолинейного берега моря веревкой данной длины максимальную площадь.

Указание. Составьте из двух таких фигур фигуру с периметром, вдвое большим длины веревки, и примените изопериметрическую теорему.

❖ 372. Отгородить от прямого угла веревкой данной длины максимальную площадь.

Указание. Составьте из четыре таких фигур фигуру с периметром, вчетверо большим длины веревки, и примените изопериметрическую теорему.

❖ 373. Отгородить от угла $2\pi/n$ веревкой данной длины максимальную площадь.

Указание. Составьте из n таких фигур фигуру с периметром, в n раз большим длины веревки, и примените изопериметрическую теорему.

❖ 374. (Мозер) Как отгородить от прямолинейного берега моря веревкой данной длины прямоугольник максимальной площади.

Указание. Составьте из двух таких прямоугольников прямоугольник с периметром, вдвое большим длины веревки, и примените задачу 183.

❶ 375. (*Хауторн*) Как отгородить двусторочатой ширмой данной длины от угла комнаты наибольшую площадь?

Указание. Составьте из четырех таких фигур восьмиугольник с периметром вчетверо большим длины ширмы и примените теорему Зенодора.

❶ 376. Как отрезать от квадрата линией данной длины, меньшей его стороны, максимальную площадь?

Указание. Эта линия ограничивает фигуру, примыкающую к двум сторонам угла квадрата. Составьте из четырех таких фигур фигуру с периметром, вчетверо большим длины данной линии, и примените изопериметрическую теорему.

❶ 377. Как отрезать от правильного треугольника отрезком данной длины треугольник максимальной площади?

Указание. Составьте из трех таких фигур шестиугольник с периметром вшестеро большим длины данного отрезка и примените теорему Зенодора.

❶ 378. Как отрезать от правильного треугольника линией данной длины, пересекающей только две стороны, фигуру максимальной площади?

Указание. Составьте из шести таких фигур фигуру с периметром, вшестеро большим длины данной линии, и примените изопериметрическую теорему.

❶ 379. Разделить правильный треугольник на две части равной площади линией минимальной длины.

Указание. Составьте из шести таких фигур фигуру с площадью, равной половине площади содержащего ее правильного шестиугольника и примените изопериметрическую теорему.

❶ 380. Разделить квадрат на две части равной площади линией минимальной длины.

Указание. Провести в нем среднюю линию:).

☉ 381. Среди всех фигур, ограниченных отрезком прямой данной длины и кривой линией данной длины наибольшую площадь имеет сегмент круга.

☉ 382. Среди всех фигур данной площади, ограниченных отрезком прямой данной длины и кривой линией наименьший периметр имеет сегмент круга.

Указание. Построим указанный экстремальный сегмент круга с данным основанием. Добавим к нему еще сегмент, дополняющий его до круга. Добавим тот же сегмент к произвольной фигуре с данными периметром и основанием. Получим фигуру с известным периметром. Максимальная площадь ее при данном периметре будет, когда она совпадет с кругом данного периметра.

☉ 383. Среди всех n -угольников с данной стороной и данным периметром наибольшую площадь имеет вписанный в окружность, у которого все остальные стороны равны.

Указание. Рассмотрим указанный экстремальный n -угольник и сегменты круга, которые он от него отрезает. К произвольному n -угольнику с данной стороной, данным периметром и равными остальными сторонами приклеим указанные сегменты ко всем его сторонам. Полученная фигура имеет периметр, равный периметру данного круга, поэтому ее максимальная площадь будет, когда она совпадет с этим кругом, т.е. n -угольник будет вписан в круг. Если же не все стороны n -угольника (отличные от данного основания) равны, то он не может быть экстремальным, так как соседние неравные стороны можно заменить на равные так, что периметр не изменится, а площадь увеличится.

☉ 384. Среди всех n -угольников с данной стороной и данной площадью наименьший периметр имеет вписанный в окружность, у которого все остальные стороны равны.

Указание. Вывести из предыдущей задачи.

☉ 385*. (Кубота) Как отрезать от длинного прямоугольника единичной ширины фигуру данного периметра и максимальной площади?

☉ 386*. Выпуклая фигура данного периметра ограничена с трех сторон частью контура параллелограмма. В каком случае она имеет максимальную площадь?

2.10 Фигуры постоянной ширины

Для произвольной фигуры M обозначим $b_M(\phi)$ ширину проекции этой фигуры на прямую, выходящую под углом ϕ из начала координат. Функция $b_M(\phi)$ очевидно определена на отрезке от нуля до π и ее можно периодически продолжить на всю числовую ось с периодом π . Очевидно, что минимум этой функции равен ширине фигуры M .

Более подробно о фигурах постоянной ширины можно прочитать в [59, 77].

☉ 387. При нечетном n рассмотрим пересечение n кругов с центрами в вершинах правильного n -угольника, радиус которых равен диаметру этого n -угольника. Докажите, что эта фигура (называемая n -угольником Рело) содержит в себе данный правильный n -угольник, является выпуклой, имеет во всех направлениях одинаковую ширину b , равную диаметру данного правильного n -угольника, и ее периметр равен πb .

☉ 388. Докажите, что диаметр фигуры постоянной ширины равен ее ширине.

Указание. Примените задачу 22.

Фигура называется *полной*, если при добавлении к ней любой новой точки ее диаметр увеличивается.

☉ 389. Докажите, что любая опорная прямая к фигуре постоянной ширины пересекается с ней ровно в одной точке (точке касания). Если провести параллельно данной опорной прямой

еще одну опорную прямую и соединить их точки касания, то полученный отрезок будет диаметром фигуры, перпендикулярным к эти опорным прямым.

Указание. Примените задачу 327.

Следующая теорема принадлежит немецкому математику Майсснеру.

Теорема 26 (Майсснер). *Любая фигура постоянной ширины является полной и наоборот.*

Ее доказательство можно найти в [11].

Следующие две теоремы принадлежат уже упоминавшемуся Ю. Палу.

Теорема 27 (Пал). *Любая фигура диаметра D содержится в фигуре постоянной ширины D .*

Теорема 28 (Пал). *Вокруг фигуры постоянной ширины D можно описать правильный шестиугольник ширины D .*

❖ **390.** Докажите, что если фигура постоянной ширины центрально-симметрична, то это круг.

Указание. У центрально-симметричной фигуры ширина равна удвоенному внутреннему радиусу, а диаметр — удвоенному внешнему радиусу. Примените задачу 388.

❖ **391.** Докажите, что полусумма фигур постоянной ширины имеет постоянную ширину.

Указание. Согласно задаче 322 полусумма двух параллельных полос одинаковой ширины есть параллельная им полоса той же ширины.

❖ **392*.** Докажите, что симметризация фигуры постоянной ширины есть круг того же диаметра.

Указание. Примените задачи 331, 391, 390.

Справедливо и обратное утверждение.

❖ **393*.** Докажите, что если симметризация выпуклой фигуры есть круг, то эта фигура имеет постоянную ширину.

Указание. Примените задачи 388, 336.

☉ 394*. Докажите, что у выпуклой фигуры постоянной ширины наибольший вписанный и наименьший описанный круги концентричны и сумма их радиусов равна ширине фигуры.

☉ 395. Угол при вершине фигуры постоянной ширины не может быть меньше 120 градусов. Равенство достигается только для треугольника Рело.

Решение этой задачи можно найти в [59].

☉ 396*. Докажите, что среди выпуклых фигуры постоянной ширины наибольший внешний и наименьший внутренний радиусы, а также их наибольшую разность имеет треугольник Рело.

Указание. Применить задачи 388, 394 и теорему Юнга.

Справедлива следующая теорема, принадлежащая знаменитому французскому математику Коши.

Теорема 29 (Коши). *Периметр выпуклой фигуры равен*

$$\int_0^\pi b_M(\phi) d\phi.$$

Вместо интеграла в формулировке теоремы можно использовать предел

$$B(M) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} b_M(i\pi/n)$$

(среднюю ширину фигуры M .) Теорему достаточно доказать для выпуклых многоугольников, а для произвольных выпуклых фигур она получается переходом к пределу (который здесь опускается).

Для доказательства рассмотрим произвольное множество отрезков l_k (например, образующих ломаную, но не обязательно), для каждого из них вычислим

$$V(l_k) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} b_{l_k}(i\pi/n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} |l_k| |\cos(i\pi/n + \alpha_k)|,$$

и назовем

$$\sum_k V(l_k)$$

вариацией множества отрезков l_k .

397*. Докажите, что $V(l_k) = C|l_k|$, где $|l_k|$ — длина отрезка l_k , а C — некоторая константа (на самом деле $C = 2/\pi$).

398*. Рассмотрим выпуклый многоугольник M_n , вписанный в данную выпуклую фигуру. Докажите, что вариация множества его сторон, равная

$$\sum_{k=1}^n V(l_k) = C \sum_{k=1}^n |l_k|,$$

с другой стороны равна

$$2B(M_n) = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{2}{m} \sum_{i=0}^{m-1} b_{M_n}(i\pi/m).$$

Указание. Сумма проекций сторон многоугольника на любую прямую в два раз больше проекции на нее самого многоугольника. Остается поменять порядок суммирования и получив равенство

$$\frac{1}{m} \sum_{i=0}^{n-1} 2b_{M_n}(i\pi/m) = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^n \sum_{i=0}^{m-1} |l_k| |\cos(i\pi/n + \alpha_k)|$$

перейти в нем к пределу при $m \rightarrow \infty$.

Применяя предыдущее равенство к случаю, когда M есть единичный круг, и переходя к пределу, получаем равенство $2C\pi = 4$, откуда $C = 2/\pi$, а в общем случае имеем

$$\frac{2}{\pi} p(M_n) = \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^n |l_k| = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{2}{m} \sum_{i=0}^{m-1} b_{M_n}(i\pi/m),$$

откуда

$$p(M_n) = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\pi}{m} \sum_{i=0}^{m-1} b_{M_n}(i\pi/m) = \int_0^\pi b_{M_n}(\phi) d\phi,$$

и переходя еще раз к пределу, получаем формулу Коши.

Следующая теорема обобщает задачу 387.

Теорема 30 (Барбье). *У любой фигуры постоянной ширины периметр в π раз больше ширины. Среди выпуклых фигуры данной ширины наименьший периметр имеют фигуры постоянной ширины.*

Указание. У этой теоремы есть много разных доказательств. Можно, например, применить задачу 392 или теорему 29.

❶ **399.** Среди всех фигур постоянной ширины наибольшую площадь имеет круг.

Указание. Примените теорему Барбье и изопериметрическое неравенство Штейнера.

Теорема 31 (Бляшке-Лебег). *Среди всех фигур постоянной ширины наименьшую площадь имеет треугольник Рело.*

Доказательство этой теоремы можно найти в [77].

2.11 Метод усреднения

❶ **400.** Имеются две системы векторов. Сумма длин проекций векторов первой системы на любую прямую не меньше суммы длин проекций векторов второй системы на ту же прямую. Докажите, что сумма длин векторов первой системы не меньше суммы длин векторов второй системы.

Указание. Рассмотрите вариации обеих систем.

❶ **401*.** Если сумма длин векторов равна L , то из них можно выбрать несколько векторов (может быть один), сумма которых имеет длину больше L/π .

Указание. Рассмотрим вариацию данной системы векторов. Она равна $2L/\pi$, а с другой стороны (см. 398) она равна среднему значению суммы длин их проекций на всевозможные прямые, проходящие через начало координат. Значит, найдется прямая, для которой указанная сумма проекций не меньше $2L/\pi$.

Можно рассматривать ориентацию на этих проекциях (соответствующую ориентации векторов), и выбрать ориентированные в одну сторону проекции так, чтобы сумма их длин была не меньше L/π . Сумма соответствующих векторов имеет проекцию не меньше L/π . Значит и длина этой суммы не меньше L/π .

Утверждение предыдущей задачи можно усилить.

❖ 402*. Если сумма длин n векторов равна L , то из них можно выбрать несколько векторов (может быть один), сумма которых имеет длину не меньше $L/((2n+2)\sin\frac{\pi}{2n+2}) > L/\pi$.

Указание. Добавим к данным векторам вектор, противоположный их сумме (если она равна нулю, то ничего не надо добавлять) и расположим эти $n+1$ векторов, сумма которых равна нулю, так, чтобы они ограничивали выпуклый m -угольник, $m \leq n+1$, с периметром, не меньшим L . Тогда диаметр этого m -угольника удовлетворяет неравенству $L \leq p \leq 2md \sin \frac{\pi}{2m}$. Остается выбрать вектора, образующие ломаную, соединяющую концы диаметра.

❖ 403. Если сумма длин n векторов равна L , а сумма самих векторов нулевая, то из них можно выбрать несколько векторов (может быть один), сумма которых имеет длину не меньше $L/(2n \sin \frac{\pi}{2n})$.

Указание. В предыдущем указании можно взять $m = n$.

❖ 404*. Укажите 6 векторов с суммой длин L и нулевой векторной суммой, из которых нельзя выбрать несколько, сумма длин которых будет больше $L/(12 \sin \frac{\pi}{12})$.

Указание. Взять вектора, идущие по сторонам шестиугольника Рейнхардта (в направлении, например, по часовой стрелке) с периметром L и диаметром $L/(12 \sin \frac{\pi}{12})$. Проверить, что сумма любых трех из них имеет длину не больше этого диаметра.

❖ 405. Если одна выпуклая фигура лежит внутри другой, т.е. периметр не больше периметра объемлющей фигуры.

Указание. Примените теорему Коши. Можно, конечно, обойтись и без нее.

◉ 406*. (ВМО, 1976) Для векторов e_i , таких, что $e_1 + e_2 + e_3 + e_4 = 0$, доказать неравенство

$$|e_1| + |e_2| + |e_3| + |e_4| \geq |e_1 + e_2| + |e_1 + e_3| + |e_1 + e_4|$$

Указание. Применить задачу 400 и свести задачу к случаю векторов, лежащих на прямой, т.е. к такому же неравенству, но для чисел. Подробное решение см. в [51]. Решение, не использующее усреднение, см. в [15].

◉ 407*. Для произвольных векторов e_i справедливо неравенство

$$|e_1| + |e_2| + |e_3| + |e_1 + e_2 + e_3| \geq |e_1 + e_2| + |e_1 + e_3| + |e_2 + e_3|.$$

Указание. Применить задачу 400 и свести задачу к случаю векторов, лежащих на прямой, т.е. к такому же неравенству, но для чисел. Подробное решение см. в [54], задача 11.31. Там же есть решение, не использующее усреднение. Но проще всего положить $e_4 = -e_1 + e_2 + e_3$ и свести все к задаче 406.

◉ 408*. Докажите, что периметр произвольного четырехугольника не меньше суммы длин его диагоналей и удвоенного расстояния между их серединами.

Указание. Применить задачу 406.

◉ 409. Если длины сторон и диагоналей выпуклого n -угольника меньше d , то его периметр меньше πd

Указание. Можно применить метод усреднения, но более сильная оценка вытекает из изодиаметрического неравенства раздела 2.5.

◉ 410. Внутри выпуклого n -угольника выбрана точка так, что сумма выходящих из нее векторов, направленных в его вершины, равна нулю (эта точка называется центром масс n -угольника). Докажите, что его периметр не меньше $4\sigma/n$, где σ — сумма расстояний от вершин n -угольника до его центра масс.

Указание. Согласно задаче 400 неравенство достаточно доказать для проекций векторов на любую прямую. Пусть эти проекции с учетом знака есть $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_k \leq 0 \leq y_{n-k} \leq$

$\dots \leq y_1$. При этом $\sum x_i = a = -\sum y_j$, а периметру соответствует $x_1 - y_1$. Усредним все x_i и y_j , заменив их на $\sum x_i/k = a/k$ и $\sum y_j/(n-k) = -a/(n-k)$ соответственно. При этом $x_1 - y_1$ может только уменьшиться, поэтому

$$(x_1 - y_1)/(2a) \geq (a/k + a/(n-k))/(2a) = n/(2k(n-k)) \geq 2/n,$$

т.к. $k(n-k) \leq n^2/4$. Из задачи 400 теперь следует, что $p \geq 4\sigma/n$. Неравенство почти достигается, если вершины n -угольника разбиты пополам (или почти пополам), вершины в каждой группе расположены рядом друг с другом, а вершины разных групп — далеко друг от друга.

Систему фигур назовем *неразделимой*, если не существует прямой, разделяющей эту систему, т.е. такой, что часть фигур системы целиком лежит по одну сторону от этой прямой, а часть — по другую.

❖ 411. (Хадвигер) Докажите, что разделимую систему выпуклых фигур можно накрыть выпуклой фигурой периметр которой равен сумме периметров этих фигур.

Указание. В качестве накрывающей фигуры возьмем выпуклую оболочку данной системы. Ширина этой оболочки в любом направлении не больше суммы ширин в этом же направлении всех фигур системы, так как проекции всех фигур системы в этом направлении в объединении дают проекцию выпуклой оболочки. Применяя теорему 29, получаем, что периметр выпуклой оболочки не больше суммы периметров фигур системы. Остается, если надо, гомотетично увеличить выпуклую оболочку, чтобы ее периметр сравнялся с суммой периметров фигур данной системы.

Для фигур постоянной ширины утверждение задачи 411 можно уточнить.

❖ 412. Докажите, что разделимую систему выпуклых фигур постоянной ширины можно накрыть фигурой постоянной ширины, периметр которой равен сумме периметров этих фигур.

Указание. Как и в задаче 411 данную систему можно накрыть фигурой, у которой ширина в любом направлении не больше сум-

мы ширины всех фигур системы. Поэтому и диаметр ее не большей указанной суммы. Согласно теореме 7 эту фигуру можно поместить фигуру постоянной ширины, равной ее диаметру, т.е. не большей упомянутой суммы. Применяя теорему 29, получаем, что периметр этой фигуры не больше суммы периметров фигур системы. Остается, если надо, гомотетично увеличить фигуру, чтобы ее периметр сравнялся с суммой периметров фигур данной системы.

Аналогичное утверждение справедливо и для системы окружностей, которые накрываются окружностью, но оно доказываться сложнее.

Метод усреднения можно применять и в пространственном случае и некоторые из рассмотренных задач имеют стереометрические аналоги (см. [53], гл. 11, п. 9). Например, задачи 400, 406, 407 даже не меняют своих формулировок при переходе к стереометрическому варианту, в задачах 405, 410 делаются естественные изменения, в задаче 401 однако оценка ослабляется до $L/4$.

Прямые и кривые

Следующую задачу автор предлагал на Московскую олимпиаду

❶413. (Москва, 1981). В квадрате с единичной стороной расположена несамопересекающаяся ломаная длины 200. Докажите, что найдется прямая, параллельная одной из сторон квадрата, пересекающая ломаную не менее, чем в 101 точке.

Указание. Оценить снизу сумму длин проекций звеньев ломаной на стороны квадрата.

❶414. В единичном квадрате можно нарисовать несамопересекающуюся кривую длины 200, которая пересекается с любой прямой не более чем в 101 точке.

Указание. Кривая должна проходить в близкой окрестности границы квадрата.

❶415*. В правильном пятиугольнике с единичной стороной лежит ломаная длины 100. Докажите, что найдется прямая, па-

параллельная одной из его диагоналей, пересекающая кривую не менее чем в 40 точках.

Указание. Обозначим P_i , $i = 1, \dots, 5$ сумму длин проекций всех звеньев ломаной на оси симметрии пятиугольника. Так как его проекции на оси симметрии равны некоторому числу h (ширине пятиугольника), то в предположении, что утверждение задачи неверно, получаем, что $P_i < 40h$, откуда $P_1 + \dots + P_5 < 200h$. Применяя метод усреднения, получаем, что $P_1 + \dots + P_5$ равна сумме $v(l_i)$, где l_i — звенья ломаной, а

$$v(l_i) = |l_i| \sum_{j=0}^4 |\cos(\alpha_i + \pi j/5)|.$$

Заметим, что последняя сумма равна удвоенной проекции правильного пятиугольника с единичными сторонами на некоторую прямую, значит она не меньше $2h$ (ширина пятиугольника равна минимальной проекции). Поэтому

$$P_1 + \dots + P_5 \geq 2h \sum |l_i| = 2hL = 200h,$$

что ведет к противоречию. Подобным же образом решается задача и для любого правильного n -угольника.

Следующая задача предлагалась в 2003 г. на задачном конкурсе IBM (там указывалось, что она является развитием задачи 413, опубликованной в Кванте в 1984 г.)

416*. В правильном пятиугольнике с единичной стороной найти ломаную наименьшей длины l , которая пересекается с некоторой прямой, не проходящей через ее звенья, не менее чем в шести точках.

Указание. См. теорему 33. Ответ: $l = 10 + 2 \sin(3\pi/10)$.

Следующая задача заимствована из [5].

417. В круге единичного радиуса расположена несамопересекающаяся кривая длины 22. Докажите, что найдется прямая, пересекающая эту кривую не менее, чем в 8 точках.

Следующие три задачи взяты из [61] (первая из них имеется также в [68] без ссылки на [61])

418. Если кривая C длины L находится внутри выпуклой кривой длины L_1 , то существует прямая, число точек пересечения которой с C не меньше, чем $2L/L_1$.

Из этого утверждения мгновенно следуют утверждения задач 413, 417, правда, в первой из них будет утверждаться существование некоторой прямой, а не прямой, параллельной стороне квадрата.

419. Внутри круга радиуса R расположены n окружностей радиуса r . Докажите, что найдется прямая, пересекающая не менее rn/R .

Указание. Применить задачу 418 (тот факт, что система окружностей не образует связную кривую, не существенен) и учесть, что прямая пересекает окружность в двух точках.

420. Рассмотрим $(h+1)(k+1)$ пар целых чисел (x_i, y_j) , таких, что $a \leq x_i \leq a+h$, $b \leq y_j \leq b+k$. Докажите, что найдутся u, v такие, что число пар (x_i, y_j) , удовлетворяющих неравенствам

$$|ux_i + vy_j + 1| \leq \rho\sqrt{u^2 + v^2},$$

не меньше $\frac{\pi\rho(h+1)(k+1)}{h+k+4\rho}$.

Указание. Условие $|ux_i + vy_j + 1| \leq \rho\sqrt{u^2 + v^2}$ означает, что точка (x_i, y_j) удалена от прямой $ux + vy + 1 = 0$ на расстояние, не большее ρ , т.е. эта прямая пересекает окружность с центром (x_i, y_j) и радиусом ρ . Далее применить задачу 419. При этом $n = (k+1)(h+1)$, $r = \rho$, но вместо объемлющего круга с периметром $2\pi R$ будет прямоугольник со сторонами $h+2\rho, k+2\rho$ и периметром $2(h+k+4\rho)$.

Пусть дана произвольная ограниченная кривая (или ломаная) γ . Рассмотрим семейство прямых $x \cos \phi + y \sin \phi = p$ данного направления ϕ , $0 \leq \phi < \pi$. Обозначим через $n_\gamma(\phi, p)$ число точек, в которых прямая $x \cos \phi + y \sin \phi = p$ пересекает кривую γ (для некоторых p это число может быть бесконечным, например, если ломаная имеет звено, параллельное данному направлению ϕ) Функция $n_\gamma(\phi, p)$ для ломаной γ является кусочно-постоянной

функцией (возможно в некоторых точках, но не на целых отрезках, равная бесконечности), отличной от нуля только на некотором отрезке $I = [a, b]$. Это значит, что для некоторого разбиения этого отрезка на отрезки I_k , функция $n_\gamma(\phi, p)$ постоянна, когда p лежит внутри любого отрезка I_k , и равна некоторому числу n_k . Обозначим

$$S(\phi) = \int_I n_\gamma(\phi, p) dp = \int_a^b n_\gamma(\phi, p) dp = \sum_k n_k |I_k|.$$

Эта сумма действительно есть интеграл (и она не зависит от значений функции на концах отрезков разбиения), хотя понятие интеграла реально нам здесь не понадобится. Если же γ — не ломаная, а кривая, но достаточно хорошая (не будем здесь уточнять, в каком смысле), то определение остается таким же (у не хороших кривых сумма может содержать бесконечно много слагаемых, т.е. превратится в бесконечный ряд). Вычислим теперь значения этой суммы (интеграла) в точках $\pi k/n$, $k = 0, \dots, n-1$, и рассмотрим сумму

$$\pi(S(0) + S(\pi/n) + \dots + S((n-1)\pi/n))/n.$$

Предел этой суммы (она называется интегральной суммой) при $n \rightarrow \infty$ обозначается кратко $\int_0^\pi S(\phi) d\phi$ (на самом деле это интеграл), а также еще и так: $\int_0^\pi \int_a^b n_\gamma(\phi, p) dp d\phi$ (это повторный интеграл) или, короче $\int \int n_\gamma(\phi, p) dp d\phi$ (а это двойной интеграл).

Справедлива следующая теорема является одним из простейших результатов так называемой интегральной геометрии. В [68, 67] она называется формулой Крофтона⁷, но в [61] эта формула связывается скорее с именами Бляшке⁸ и Фавара⁹.

Теорема 32. *Длина кривой γ равна $\frac{1}{2} \int \int n_\gamma(\phi, p) dp d\phi$*

⁷Английский математик 19-го века.

⁸Вильгельм Бляшке — известный немецкий математик 20-го века, один из основателей интегральной геометрии.

⁹Известный французский математик 20-го века. С помощью этой формулы он дал новое определение понятия длины кривой.

Доказательство. Хорошая кривая (например, окружность) может быть сколь угодно точно приближена конечно-звенной ломаной, поэтому достаточно все доказать для ломаных. Если ломаная составлена из двух ломаных, и она верна для каждой из них, то она верна и для всей ломаной, потому что $n_\gamma(\phi, p) = n_{\gamma_1}(\phi, p) + n_{\gamma_2}(\phi, p)$. Поэтому достаточно все доказать для одного звена, т.е. для отрезка прямой l . Если его длина равна $|l|$, то при любом его направлении $\int \int n_l(\phi, p) dp d\phi$ равен $C|l|$, где — некоторая константа, откуда следует, что для любой ломаной

$$\int \int n_\gamma(\phi, p) dp d\phi = C|\gamma|,$$

где $|\gamma|$ — ее длина, и переходя к пределу, получаем то же равенство для любой хорошей кривой. Константу C можно вычислить, найдя соответствующий «тригонометрический» предел, но можно поступить так: в качестве γ возьмем окружность единичного радиуса, тогда для нее $n_\gamma(\phi, p) = 2$ при $0 < \phi < \pi$, $-1 < p < 1$, и нуль в остальных случаях, поэтому $\int \int n_\gamma(\phi, p) dp d\phi = 2 \cdot 2 \cdot \pi = 4\pi$, а так как длина окружности равна 2π , то $C = 2$.

421. Выведите из доказанной теоремы теорему 29.

Указание. Для кривой, ограничивающей выпуклую фигуру K при любом ϕ очевидно $n_K(\phi, p) = 2$ на интервале длины $b_K(\phi)$, где $b_K(\phi)$ — ширина фигуры в направлении ϕ , и $n_K(\phi, p) = 0$ вне этого интервала (на его концах $n_K(\phi, p) = 1$), поэтому

$$\begin{aligned} p &= \frac{1}{2} \int \int n_K(\phi, p) dp d\phi = \frac{1}{2} \int \int 2 dp d\phi = \int \int dp d\phi = \\ &= \int_0^\pi b_K(\phi) d\phi. \end{aligned}$$

Эту теорему можно применять для решения задач этого и предыдущего раздела вместо использованного там понятия вариации кривой.

В [79] доказана следующая теорема¹⁰

¹⁰В связи с задачей 416.

Теорема 33 (Купершмит, Надь, Равский). Пусть для выпуклой фигуры периметра p и диаметра d число l есть наименьшая длина лежащей в ней кривой (не обязательно выпуклой) такой, что существует прямая, пересекающая эту кривую не менее чем в $n+1$ различных точках. Тогда $l = pn/2$ при четном n и $l = p(n-1)/2 + d$ при n нечетном.

Доказательство. Если кривая γ длины l пересекается с любой прямой не более чем в n точках, то согласно теореме 32

$$l = \frac{1}{2} \int \int n_{\gamma}(\phi, p) dp d\phi \leq \frac{1}{2} n \int \int dp d\phi,$$

а согласно задаче 421 $p = \int \int dp d\phi = \int_0^{\pi} b_K(\phi) d\phi$, откуда $l \leq pn/2$.

Пусть n нечетно и кривая пересекается с любой прямой не более чем в n точках. Докажем, что $l \leq p(n-1)/2 + d$. Достаточно сделать это в предположении, что l — ломаная. Добавим к ней еще одно звено длины l_0 , чтобы ломаная γ' стала замкнутой. Очевидно, что любая прямая произвольного направления ϕ , не проходящая через ее вершины, пересекает ее четное число раз. Если эта прямая к тому же не пересекает добавленное звено l_0 , то $n(\phi, p) \leq n-1$, а если пересекает, то $n(\phi, p) \leq n+1$. Но тогда

$$\begin{aligned} l + l_0 &= \frac{1}{2} \int \int n_{\gamma'}(\phi, p) dp d\phi \leq \\ &\leq \frac{n-1}{2} \int \int dp d\phi + \frac{1}{2} \int \int 2n_{l_0}(\phi, p) dp d\phi = \\ &= \frac{n-1}{2} \int b_K(\phi) d\phi + \frac{1}{2} \int 2b_{l_0}(\phi) d\phi = \frac{n-1}{2} p + 2l_0, \end{aligned}$$

откуда $l \leq \frac{n-1}{2} p + l_0 \leq \frac{n-1}{2} p + d$.

Поэтому, если кривая длины l пересекается с некоторой прямой не менее чем в $n+1$ -й точке, то $l > pn/2$ и $l > p(n-1)/2 + d$ при нечетном n . Чтобы построить пример кривой с длиной сколь угодно близкой к указанным границам, и пересекающейся с некоторой прямой в $n+1$ -й точке, достаточно $r = \lfloor n/2 \rfloor$ раз намотать

кривую вдоль границы данной выпуклой фигуры сколь угодно близко к ней, а если n нечетно, то потом направить ее вдоль одного из диаметров фигуры.

Некоторые из задач этого раздела имеют стереометрические аналоги. Приведем один пример.

❶ 422. В кубе с единичной стороной расположена несамопересекающаяся ломаная длины 300. Докажите, что найдется плоскость, параллельная одной из сторон куба, пересекающая ломаную не менее, чем в 101 точке.

2.12 Задачи о диаметрах

Понятие диаметра часто встречалось в этой книжке. Но кажется нелишним посвятить ему отдельный раздел.

Следующая задача предлагалась на международной олимпиаде.

❶ 423. (IMO, 1965) Докажите теорему Хопфа¹¹ о том, что максимальное число диаметров в n -угольнике (и в любом n -точечном множестве) равно n .

Решение можно найти, естественно, в [45].

❶ 424. Докажите, что если γ — n -угольник, то функция $b_M(\phi)$ непрерывна и имеет на отрезке от нуля до π поровну локальных максимумов и минимумов, причем и тех и других не более n . Выведите отсюда теорему Хопфа.

Указание. Максимумы соответствуют диаметрам согласно задаче 22. Локальные минимумы достигаются в точках, соответствующих высотам n -угольника.

❶ 425. (Венгрия, 1962) Если в n -угольнике выбрано m попарно пересекающихся сторон или диагоналей, то $m \leq n$. Выведите из этого утверждения теорему Хопфа.

¹¹Хайнц Хопф — известный швейцарский математик 20-го века.

Указание. Диаметры не могут не пересекаться в силу задачи 188.

В книге [19] приведено четыре решения этой задачи.

В [73] можно найти доказательство следующей теоремы.

Теорема 34 (Грюнбаум-Хеппеш-Страшевич). *Максимальное число диаметров у n -то чечного множества в трехмерном пространстве равно $2n - 2$.*

К сожалению, оно достаточно сложное.

Турановские графы и a -диаметры

Назовем a -диаметром произвольную пару точек множества, расстояние между которыми не меньше aD , где D — диаметр этого множества. Максимальное число a -диаметров у n -элементного плоского множества обозначим $N_2(a, n)$. Далее будет приведена теорема Эрдеша-Шош-Турана, в которой эта величина точно вычисляется. Для формулировки теоремы понадобятся следующие понятия.

Обозначим $k_2(a)$ наибольшее число точек в плоском множестве, в котором любая пара точек образует a -диаметр. Предыдущие определения очевидно можно ввести и пространственном случае. (тогда они снабжаются индексом 3.)

Обозначим $m(M)$ минимальное расстояние между точками n -элементного множества M , а через $m_2(n)$ обозначим максимальное значение $m(M)$, которое может быть у n -точечного плоского множества M единичного диаметра. Аналогичную величину для трехмерных множеств обозначаем $m_3(n)$.

Очевидно, что

$$m_2(2) = m_2(3) = 1, m_3(2) = m_3(3) = m_3(4) = 1.$$

426. Докажите, что $k_2(a) = n$ если и только если $m_2(n+1) \leq a < m_2(n)$ и $k_3(a) = n$ если и только если $m_3(n+1) \leq a < m_3(n)$.

Более точная информация о величинах $k_d(a)$ будет дана в следующих далее задачах.

Для доказательства теоремы Эрдеша-Шош-Турана¹² понадобится еще одна теорема Турана, относящаяся к экстремальной теории графов. Мы сформулируем эту теорему, не пользуясь специальной терминологией, и с целью разминки предлагаем читателю следующие задачи.

❶ 427. (ВМО, 1969) В компании из n человек среди любых трех найдется хотя бы одна пара незнакомых. Докажите, что число пар знакомых не больше $n^2/4$.

Указание. Следующее замечательное рассуждение принадлежит болгарским математикам Хаджииванову и Ненову. Пусть наибольшее число знакомых у одного человека равно a . Рассмотрим этого человека и всех незнакомых с ним. Очевидно в этой компании $n - a$ человек, а остальные a человек не знакомы друг с другом (так как знакомы с одним человеком). Каждый из первой компании имеет не более a знакомых, поэтому общее число пар знакомых не более $a(n - a)$ (так как знакомых, не принадлежащих этой компании, быть не может). Остается заметить, что $a(n - a) \leq n^2/4$.

Следующую задачу автор предлагал на Московскую олимпиаду (впрочем, это известный факт из теории графов).

❶ 428*. (Москва, 1983) В пространстве выбрано n точек, никакие 4 из них не лежат в одной плоскости. Проведен $\lfloor n^2/4 \rfloor + 1$ отрезок, у каждого из которых оба конца являются выбранными точками. Докажите, что эти отрезки образуют не менее $\lfloor n/2 \rfloor$ треугольников, причем большего количества треугольников может и не получиться. Если же проведен $\lfloor n^2/4 \rfloor$ отрезок, то треугольников может не быть вообще.

Решение этой задачи можно найти в [20].

❶ 429*. В компании из n человек среди любых $(k + 1)$ из них найдется хотя бы одна пара незнакомых. Докажите, что число

¹²Пал Эрдеш, Вера Шош, Пал Туран — известные венгерские математики 20-го века

пар знакомых не больше

$$\frac{k-1}{2k}n^2.$$

Указание. Применим индукцию по k . База индукции ($k = 2$) уже доказана. Выполним шаг индукции. Пусть наибольшее число знакомых у одного человека равно a . Рассмотрим этого человека и всех незнакомых с ним. Очевидно в этой компании $n - a$ человек, а для остальных a человек верно следующее: среди любых k из них найдутся двое незнакомых. Поэтому согласно предположению индукции общее число знакомых пар во второй компании не больше $\frac{k-2}{2(k-1)}a^2$. Каждый из первой компании имеет не более a знакомых, поэтому общее число пар знакомых не более

$$\begin{aligned} a(n-a) + \frac{k-2}{2k-2}a^2 &= \frac{2k-2}{k} \frac{ka}{2k-2} \left(n - \frac{ka}{2k-2}\right) \leq \\ &\leq \frac{2k-2}{k} \frac{n^2}{4} = \frac{k-1}{2k}n^2. \end{aligned}$$

При n не кратном k чуть более точную оценку дает следующая задача.

● 430*. (Туран) Отрезки, соединяющие пары точек n -элементного множества, покрашены в белый и черный цвета так, что среди любых его $k+1$ точек найдется хотя бы одна пара, соединенная белым отрезком. Тогда черных отрезков у этого множества не больше

$$\frac{k-1}{2k}(n^2 - r^2) + \frac{r(r-1)}{2},$$

где $n = kq + r$, $0 \leq r < k$, q — целое число.

Указание. Применим индукцию по n . База индукции ($n \leq k$) очевидна. Шаг индукции. Выберем максимальное подмножество, в котором все отрезки между точками черные. Если в нем менее k точек, добавим к нему несколько точек, чтобы получилось k -точечное множество K . Остальные точки образуют $(n-k)$ -точечное множество L . Применяя к нему предположение индукции, получаем что в нем не более $\frac{k-1}{2k}((n-k)^2 - r^2) + \frac{r(r-1)}{2}$

черных отрезков. Для каждой точки x из L во множество K выходит не более $k - 1$ черных отрезков (потому, что в противном случае, добавляя x к выбранному максимальному подмножеству, получаем большее подмножество, в котором все отрезки черные), поэтому общее число черных отрезков не больше

$$\frac{k-1}{2k}((n-k)^2 - r^2) + \frac{r(r-1)}{2} + (n-k)(k-1) + \frac{k(k-1)}{2} =$$

$$\frac{k-1}{2k}(n^2 - r^2) + \frac{r(r-1)}{2}.$$

431. (Туран) Покажите, что оценка предыдущей задачи может достигаться.

Указание. Разобьем n точек на r групп по $q+1$ точке и $k-r$ групп по q точек. Точки из разных групп соединим черными отрезками, а точки из одной группы — белыми. Очевидно, среди любых $k+1$ точки найдется пара точек, лежащие в одной группе и соединенные поэтому белым отрезком. Общее число белых отрезков равно $r(q+1)q/2 + (k-r)q(q-1)/2 = (n(q-1) + r(q+1))/2$, поэтому общее число черных отрезков равно

$$n(n-1)/2 - (n(q-1) + r(q+1))/2 = \frac{k-1}{2k}(n^2 - r^2) + \frac{r(r-1)}{2}.$$

И, наконец, обещанная

Теорема 35 (Эрдеш-Шош-Туран). Для любого $a, 0 < a < 1$, и $n = k(a)q + r$, где $0 \leq r < k(a)$ и q — целое число, справедливо равенство

$$N(a, n) = \frac{k(a)-1}{2k(a)}(n^2 - r^2) + \frac{r(r-1)}{2}.$$

Для доказательства нижней оценки достаточно указать n -элементное множество с $N(a, n)$ диаметрами. Обозначим $K(a)$ какое-нибудь $k(a)$ -элементное множество, в котором любая пара точек образует a -диаметр. Существование такого множества

вытекает из определения $k(a)$, из него также следует существование положительного ϵ , такого что расстояние между любыми двумя точками из множества $K(a)$ больше $ad + (a+1)\epsilon$, где d — диаметр $K(a)$. Пусть $n = k(a)q + r$, $0 \leq r < k(a)$. Опишем окружности радиуса $\epsilon/2$ с центрами в точках множества $K(a)$. Внутри каждой из первых r окружностей выберем по $q+1$ точке (полученные множества точек обозначим $M_1, \dots, M_r$), а внутри каждой из остальных $k(a) - r$ окружностей выберем по q точек (полученные множества точек обозначим $M_{r+1}, \dots, M_{k(a)}$). Объединение M указанных множеств M_i содержит $(q+1)r + q(k(a) - r) = qk(a) + r = n$ точек. Для любых двух точек x, y из полученного множества расстояние между ними в силу неравенства треугольника не больше $d + \epsilon$, поэтому диаметр этого множества не больше $d + \epsilon$. Если x, y взяты из разных множеств M_i , то согласно неравенству треугольника расстояние между x и y больше $ad + (a+1)\epsilon - \epsilon = a(d + \epsilon)$, поэтому любая пара точек из разных множеств M_i образует a -диаметр множества M . Так как число пар точек, принадлежащих одному множеству M_i , равно $(q+1)q/2$ для $q+1$ -элементных множеств, и равно $q(q-1)/2$ для остальных $k(a) - r$ множеств, а общее число пар точек равно $n(n-1)/2$, то число a -диаметров не меньше

$$\begin{aligned} n(n-1)/2 - r(q+1)q/2 - (k(a)-r)q(q-1)/2 = \\ = \frac{k-1}{2k}(n^2 - r^2) + \frac{r(r-1)}{2}. \end{aligned}$$

Верхняя оценка доказана. Для доказательства верхней оценки в произвольном n -элементном множестве отрезки, являющиеся a -диаметрами, покрасим в белый цвет, а остальные отрезки — в черный. Из определения $k(a)$ следует, что в этом множестве не существует $k(a)+1$ -элементного подмножества, все отрезки которого белого цвета. Остается применить задачу 430.

Для применения теоремы надо знать конкретные значения $k_d(a)$.

432. Докажите, что $k_2(a) = 3$ при $\frac{1}{\sqrt{2}} \leq a < 1$,
 $k_2(a) = 4$ при $\frac{2}{1+\sqrt{5}} \leq a < \frac{1}{\sqrt{2}}$.

$$k_2(a) = 5 \text{ при } \frac{1}{\sin 2\pi/5} \leq a < \frac{2}{1+\sqrt{5}},$$

$$k_2(a) = 6 \text{ при } \frac{1}{2} \leq a < \frac{1}{\sin 2\pi/5},$$

$$k_2(a) \geq 7 \text{ при } a < \frac{1}{2},$$

$$k_3(a) = 4 \text{ при } \frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{3}} \leq a < 1,$$

$$k_3(a) = 5 \text{ при } \frac{1}{\sqrt{2}} \leq a < \frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{3}},$$

$$k_3(a) \geq 6 \text{ при } a < \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Указание. Применить следующие далее задачи 426, 433, 434, 36, 437.

❖ 433. Докажите, что $m_2(4) = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Единственная экстремальная конфигурация в этом случае есть просто квадрат с единичной диагональю.

Указание. Действительно, если выпуклая оболочка есть треугольник (возможно вырождающийся в отрезок), то одна из его сторон видна из четвертой точки (лежащей внутри его) под углом не меньшим $2\pi/3$, поэтому согласно теореме косинусов квадрат длины этой стороны не меньше $2m(M)^2 + 2m(M)^2 \cos 2\pi/3 = 3m(M)^2$, откуда имеем, что $m(M) \leq 1/\sqrt{3} < 1/\sqrt{2}$, и, если наконец M совпадает с множеством вершин выпуклого четырехугольника, то наибольший из его углов тупой или прямой, поэтому согласно теореме косинусов квадрат длины лежащей против него диагонали не меньше $2m(M)^2$, откуда имеем, что $m(M) \leq 1/\sqrt{2}$, причем равенство возможно лишь когда все углы четырехугольника прямые и все его стороны равны, т.е. он является квадратом.

❖ 434. Докажите, что $m_2(5) = \frac{2}{1+\sqrt{5}}$ и единственная экстремальная конфигурация есть правильный пятиугольник с единичной диагональю.

Действительно, если конфигурация образует выпуклый пятиугольник $ABCDE$ (возможно вырожденный), то производя, если нужно, перестановку в обозначениях, можно считать, что угол ABC не меньше $3\pi/5$ (так как если все углы пятиугольника меньше $3\pi/5$, то их сумма меньше 3π , а это невозможно). Тогда

согласно теореме косинусов

$$1 \geq |AC|^2 \geq 2m(M)^2 + 2m(M)^2 \cos 3\pi/5,$$

откуда (после некоторых вычислений) имеем, что $m(M) \leq \frac{2}{1+\sqrt{5}}$, причем равенство возможно лишь когда все углы и все стороны у пятиугольника равны, т.е. он правильный. Если выпуклая оболочка множества M есть четырехугольник или треугольник (возможно вырождающийся в отрезок), то одна из точек M лежит внутри или на границе треугольника (возможно вырожденного), образованного тремя другими точками M , а в этом случае, как уже было показано выше,

$$m(M) \leq 1/\sqrt{3} < \frac{2}{1+\sqrt{5}}.$$

Справедлива следующая теорема, которую мы оставим без доказательства.

Теорема 36 (Эрдеш-Бейтмен). *Справедливы равенства*

$$m_2(6) = \frac{1}{\sin 2\pi/5}, \quad m_2(7) = \frac{1}{2}.$$

Следующая задача, некогда предлагавшаяся автором на Всесоюзную олимпиаду, понадобится далее.

435*. (ВМО, 1982) Докажите, что для любой внутренней точки тетраэдра одно из его ребер видно под углом, косинус которого не больше $-1/3$.

Указание. Пусть e_1, e_2, e_3, e_4 — единичные вектора, направленные из данной точки в вершины тетраэдра. Прямая, проходящая через e_4 , пересекает трехгранный угол, образованный векторами e_1, e_2, e_3 , поэтому для некоторых $x_i \geq 0$ имеем

$$x_1 e_1 + \dots + x_4 e_4 = 0.$$

Возводя это равенство скалярно в квадрат и предполагая, что косинусы всех попарных углов между этими векторами больше

$-1/3$, имеем

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{i=1}^4 x_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq 4} x_i x_j (e_i, e_j) > \sum_{i=1}^4 x_i^2 - \frac{2}{3} \sum_{1 \leq i < j \leq 4} x_i x_j = \\ &= \frac{1}{3} \sum_{1 \leq i < j \leq 4} (x_i - x_j)^2 \geq 0. \end{aligned}$$

Следующие две задачи принадлежат известному немецкому логикку Шютте.

● 436**. (Шютте) Докажите, что $m_3(5) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{3}}$.

Указание. Пусть диаметр множества A, B, C, D, E равен 1. Возможны два случая (без учета вырожденных): одна точка (например E) лежит в тетраэдре с вершинами в других точках или $ABCDE$ — выпуклый шестигранник, являющийся объединением двух тетраэдров с общей гранью ($ABCD$ и $EBCD$). В первом случае одно из ребер, скажем AB , видно из E под углом ϕ , $\cos \phi \leq -1/3$ согласно задаче 435. Если предположить, что AE и BE больше $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}$, то из теоремы косинусов следует противоречие:

$$1 \geq |AB|^2 = |AE|^2 + |BE|^2 - 2|AE||BE|\cos \phi > \frac{3}{4} + \frac{3}{4} = 1$$

Поэтому в этом случае $m(ABCDE) \leq \min\{AE, BE\} \leq \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}$. Во втором случае прямая AE пересекает треугольник BCD в некоторой точке K . Согласно задаче 77 этот треугольник можно накрыть кругом радиуса $1/\sqrt{3}$, поэтому круги с этим радиусом и центрами в B, C, D накрывают этот треугольник, а значит и точку K , поэтому можно считать, что $BK \leq 1/\sqrt{3}$. Поэтому в треугольнике AEB высота $BL \leq BK \leq 1/\sqrt{3}$. Можно считать, что L лежит на отрезке AE (иначе выберем в этом треугольнике меньшую высоту и сменим обозначения). Так как $AE \leq 1$, то можно считать, что $AL \leq 1/2$. Тогда из теоремы Пифагора следует, что

$$|AB|^2 = |BL|^2 + |AL|^2 \leq \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{7}{12}.$$

Поэтому $m(ABCDE) \leq AB \leq \frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{3}}$.

Если выбрать A, B, C, D, E так, что $BC = CD = BD = AE = 1$, $AE \perp BCD$, $AE \cap BCD = K$, $BK = CK = DK = 1/\sqrt{3}$, то

$$m(ABCDE) = EB = EC = ED = AB = AC = AD = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{3}}.$$

● 437*. (Шютте) Докажите, что $m_3(6) = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Второе равенство легко вытекает из не очень просто доказываемой теоремы Шютте о том, что множество $\{M_1, \dots, M_n\}$ точек в трехмерном пространстве, такое, что все углы $M_i M_j M_k$ острые, существует лишь при $n = 3, 4, 5$. Действительно, если множество M состоит из шести точек, то согласно указанной теореме в нем найдется тупоугольный или прямоугольный треугольник, тогда квадрат его наибольшей стороны по теореме косинусов не меньше $2m(M)^2$, откуда имеем, что $m(M) \leq 1/\sqrt{2}$. Интересно, что равенство здесь достигается на двух различных конфигурациях. Одна из них — это правильный октаэдр с единичной диагональю, а вторая — правильная треугольная призма с квадратными боковыми гранями. За доказательством упомянутой теоремы Шютте читатель отсылается к книге [73], задача 32.

● 438*. Докажите, что $m_2(n)$ и $m_3(n)$ далее монотонно убывают.

● 439*. Докажите, что $\frac{1}{2\sqrt{n}} \leq m_2(n) \leq \frac{2}{\sqrt{n}}$. Решение можно найти в [73].

В [69] доказана более точная

Теорема 37 (Фейеш-Тот). Справедливо равенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} m_2(n)\sqrt{n} = \sqrt{\frac{\pi}{2\sqrt{3}}}.$$

Известно также, что существует $\lim_{n \rightarrow \infty} m_3(n)\sqrt[3]{n}$.

Задача Эрдеша-Винце

Обозначим $d(n)$ максимальное значение $m(M)$, которое может быть у выпуклого n -угольника единичного диаметра. Очевидно $d(3) = 1$.

❖ 440. Докажите, что $d(4) = 1/\sqrt{2}$.

Следующие две задачи принадлежат венгерскому геометру Винце.

❖ 441. (Винце) Для n , не равного степени двойки,

$$d(n) = 2 \sin \frac{\pi}{2n}.$$

Указание. Примените теорему 13.

❖ 442*. (Винце) Для $n = 8$

$$d(8) > 2 \sin \frac{\pi}{16}.$$

2.13 Задача Лебега о покрывающих для фигур данного диаметра

Универсальная покрывающая для фигур данного диаметра — это фигура, которой можно накрыть (возможно параллельно сдвинув и повернув на некоторый угол) любое множество данного диаметра. Как найти универсальную покрывающую минимальной площади (или периметра)? Эту задачу поставил знаменитый Анри Лебег в беседе с венгерским математиком Ю.Палом в 1921 г.

Попробуйте сами решить следующие задачи.

❖ 443. Любую фигуру диаметра 1 можно заключить в единичный квадрат, а в меньший квадрат, вообще говоря, нельзя.

❖ 444. Любую фигуру диаметра 1 можно заключить в правильный треугольник со стороной $\sqrt{3}$, а в меньший правильный треугольник, вообще говоря, нельзя.

Доказательство следующей теоремы можно найти в [73, 10].

Теорема 38 (Пал). Любую фигуру диаметра 1 можно заключить в правильный шестиугольник со стороной $\sqrt{3}/3$, а в меньший правильный шестиугольник, вообще говоря, нельзя. Впишем в рассматриваемый шестиугольник окружность, выберем две не соседние, но и не диаметрально противоположные вершины, и отрезем от него два примыкающих к этим вершинам треугольника прямыми, касающимися рассматриваемой окружности и перпендикулярными к выходящим из этих вершин диаметрам шестиугольника. Полученный восьмиугольник также является «универсальной покрывкой» для фигур единичного диаметра.

Указание. Выберем произвольную прямую l и зажмем данную фигуру между опорными прямыми, параллельными l . Так как на них есть по одной точке фигуры, то ширина полосы между этими прямыми не больше 1. Повернем прямую l на 60 градусов по часовой стрелке и повторив указанное построение, получим еще одну полосу, накрывающую данную фигуру. Повернув прямую l еще на 60 градусов, получим третью полосу. Их пересечение является равноугольным шестиугольником, накрывающим данную фигуру. Рассмотрим две его противоположные стороны, лежащие на сторонах первой полосы. Если их длины не равны, то можно уравнивать их следующим образом. Построенный шестиугольник однозначно определялся по направлению прямой l . Начнем непрерывно поворачивать прямую l по часовой стрелке. Для каждого ее нового положения $l(\phi)$ (определяемого углом поворота ϕ) рассмотрим построенный по прямой $l(\phi)$ равноугольный шестиугольник и обозначим длины определенных выше его сторон через $a(\phi)$ и $b(\phi)$. Можно проверить, что $a(\phi)$ и $b(\phi)$ — непрерывные 2π периодические функции, причем очевидно $a(\phi + \pi) = b(\phi)$, $b(\phi + \pi) = a(\phi)$. Так как непрерывная функция $f(\phi) = a(\phi) - b(\phi)$ на концах отрезка $[0, \pi]$ принимает значения разных знаков $f(0) = a(0) - b(0) = b(\pi) - a(\pi) = -f(\pi)$, то в некоторой точке этого отрезка она равна нулю, т.е. при некотором ϕ_0 $b(\phi_0) = a(\phi_0)$, значит при выборе $l = l(\phi_0)$ у построенного шестиугольника противоположные стороны a и b равны. Если расстояние между ними меньше 1, то его можно увеличить до 1 так, что

шестиугольник расширится, но две противоположные стороны будут по-прежнему равны. Рассмотрим другую пару противоположных (не обязательно равных) сторон и увеличив (если надо) расстояние между ними так, чтобы стороны a и b по-прежнему оставались равными. Повторив (если надо) это преобразование, получим накрывающий шестиугольник с равными сторонами a и b , у которого расстояния между всеми парами противоположных сторон равны 1. Этот шестиугольник по длине стороны a определяется однозначно, если он существует. Если эта длина равна $1/\sqrt{3}$, то он будет правильным. Если длина a меньше $1/\sqrt{3}$, а расстояния между всеми парами противоположных сторон по-прежнему равны 1, то сторона b будет больше $1/\sqrt{3}$, значит такой случай невозможен. Аналогично невозможен случай $a > 1/\sqrt{3}$. Поэтому построенная покрывка — правильный шестиугольник со сторонами $1/\sqrt{3}$ и шириной 1. Впишем в рассматриваемый шестиугольник окружность, и отрезем от него шесть примыкающих к его вершинам треугольников прямыми, касающимися этой окружности в точках ее пересечения его диагоналями. Так как расстояния между противоположными треугольниками не меньше единицы, внутри одного из них не будет ни одной точки покрываемой фигуры. Таких пустых треугольников будет не меньше трех, и два из них обязательно будут не соседними, но и не противоположными. Отрезая их, получим покрывку для данной фигуры. Но все такие покрывки конгруэнтны.

Немецкий математик Шпраг показал, что от покрывки Пала можно отрезать еще два кусочка дугами двух окружностей так, что полученный криволинейный десятиугольник все еще будет универсальной покрывкой.

Для трехмерного пространства известны следующие теоремы об универсальных покрывках. Первая из них принадлежит американскому математику Гейлу.

Теорема 39 (Гейл). *Каждое пространственное тело диаметра 1 можно накрыть правильным тетраэдром с ребром $\sqrt{6}$ и правильным октаэдром с ребром $\sqrt{6}/2$.*

Вторая была независимо доказана израильским математиком Грюнбаумом и венгерским математиком Хеппешем.

Теорема 40 (Грюнбаум-Хеппеш). *Отрежем от правильного октаэдра с ребром $\sqrt{6}/2$ три примыкающие к его трем вершинам пирамиды плоскостями, параллельными диагональным плоскостям октаэдра и касающимися вписанного в октаэдр шара. Полученный 11-гранник является универсальной покрывшкой для тел единичного диаметра.*

Доказательства этих теорем можно найти в [10].

В 1997 В.В.Макеев показал, что универсальной покрывшкой любого множества диаметра 1 является также ромбододекаэдр — многогранник, ограниченный 12 одинаковыми ромбическими гранями, у которого расстояние между параллельными гранями равно 1. Более того, он показал, что от ромбододекаэдра можно еще отсечь три куса такими же плоскостями, как и в случае октаэдра.

2.14 Задача Борсука

Известный польский математик Кароль Борсук поставил задачу о разбиении произвольного множества на наименьшее число частей меньшего диаметра.

Теорема 41 (Борсук). *Круг диаметра 1 нельзя разбить на две части меньшего диаметра, но можно разбить на три части диаметра не больше $\sqrt{3}/2$ каждая, причем на три части еще меньшего диаметра круг разбить нельзя. Каждую фигуру диаметра 1 можно разбить на три части диаметра $\leq \sqrt{3}/2$.*

Указание. Накроем фигуру шестиугольником Пала из теоремы 38. Разрежем его на три равных пятиугольника, опустив из центра шестиугольника перпендикуляры три попарно несмежные стороны. Диаметр каждой из них равен $\leq \sqrt{3}/2$.

Если единичный круг разбит на три части диаметра меньшего $\sqrt{3}/2$ каждая, то и его окружность разбита на такие части.

Но на одной из них обязательно найдутся две точки, ограничивающую дугу не менее 120 градусов. Эти точки удалены друг от друга не менее, чем на $\leq \sqrt{3}/2$.

Следующая задача принадлежит немецкому математику Ленцу.

❖ 445*. (Ленц) Каждую фигуру диаметра 1 можно разбить на четыре части диаметра $\leq \sqrt{2}/2$ и на семь частей диаметра $\leq 1/2$. Круг диаметра 1 можно разбить на четыре части диаметра не больше $\sqrt{2}/2$, но на четыре части меньшего диаметра — нельзя, его можно разбить на семь частей диаметра не больше $1/2$, но на семь частей меньшего диаметра — нельзя.

Указание. Согласно задаче 443 фигуру диаметра 1 можно накрыть квадратом со стороной 1. Разрезая его на 4 равных квадрата, получаем получаем 4 части диаметра не больше $\sqrt{2}/2$.

Если единичный круг разбит на 4 части диаметра меньшего $\sqrt{2}/2$ каждая, то и его окружность разбита на такие части. Но на одной из них обязательно найдутся две точки, ограничивающую дугу не менее 90 градусов. Эти точки удалены друг от друга не менее, чем на $\leq \sqrt{2}/2$.

Согласно теореме 38 фигуру диаметра 1 можно накрыть шестиугольником Пала. Вырежем из него концентричный с ним правильный шестиугольник со стороной $1/4$ так, чтобы опущенные из его вершин перпендикуляры на стороны большого шестиугольника попадали точно в середины этих сторон. Эти перпендикуляры вырезают из большого шестиугольника еще 6 равных пятиугольников, диаметры которых равны $1/2$, как и диаметр малого шестиугольника.

Если единичный круг разбит на 7 частей диаметра меньшего $1/2$ каждая, то и его окружность разбита на не более чем 6 таких же частей, потому что та часть, которая содержит центр, не может содержать точек на окружности. Но тогда на одной из них обязательно найдутся две точки, ограничивающую дугу не менее 60 градусов. Эти точки удалены друг от друга не менее, чем на $1/2$.

Следующая задача принадлежит американскому математику Грехэму.

❶ 446*. (Грехэм) Круг диаметра 1 можно разбить на пять частей диаметра не больше $\frac{1}{4}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}$, но на пять частей меньшего диаметра — нельзя.

❶ 447. (Московская областная олимпиада, 1982) В квадрате лежат 4 точки. Докажите, что расстояние между какими-нибудь двумя из них не больше его стороны, причем эту оценку улучшить нельзя.

❶ 448. (Москва, 1984) В квадрате лежат 5 точек. Докажите, что расстояние между какими-нибудь двумя из них не больше половины его диагонали, причем эту оценку улучшить нельзя.

Указание. Разбить квадрат на 4 равных квадрата.

❶ 449*. В квадрате с единичной стороной лежат три точки. Докажите, что среди них найдутся две, расстояние между которыми не больше $\sqrt{8 - 4\sqrt{3}}$.

❶ 450*. (Грехэм) Квадрат диаметра 1 можно разбить на две части диаметра $\sqrt{10}/4$, а на две части меньшего диаметра — нельзя, его можно разбить на три части диаметра не больше $\sqrt{130}/16$, но на три части меньшего диаметра — нельзя, можно разбить на четыре части диаметра $1/2$, но на четыре части меньшего диаметра — нельзя.

Решение можно найти в [73].

❶ 451. В правильном треугольнике лежат 6 точек. Докажите, что расстояние между какими-нибудь двумя из них не больше половины его стороны, причем эту оценку улучшить нельзя.

Указание. Разбить треугольник на 4 равных треугольника.

❶ 452. В правильном треугольнике лежат 10 точек. Докажите, что расстояние между какими-нибудь двумя из них не больше трети его стороны, причем эту оценку улучшить нельзя.

Указание. Разбить треугольник на 9 равных треугольников.

❶ 453*. (Грехэм) Правильный треугольник диаметра 1 нельзя разбить на две части меньшего диаметра, но можно разбить на три части диаметра $\sqrt{3}/3$, причем на три части меньшего диаметра — нельзя, его можно разбить на четыре и пять частей диаметра не больше $1/2$, но на четыре и пять частей меньшего диаметра — нельзя.

Решение можно найти в [73].

❶ 454*. Прямоугольник размера 3×4 можно разбить на три части диаметра $\sqrt{10585}/32$, а на три части меньшего диаметра нельзя.

❶ 455*. (Москва, 1984) В прямоугольнике размера 3×4 лежат 4 точки. Докажите, что расстояние между какими-нибудь двумя из них не больше $25/8$, причем эту оценку улучшить нельзя.

❶ 456. Прямоугольник размера 3×4 можно разбить на 5 частей диаметра не больше $\sqrt{5}$.

❶ 457. (ВМО, 1981) В прямоугольнике размера 3×4 лежат 6 точек. Докажите, что расстояние между какими-нибудь двумя из них не больше $\sqrt{5}$.

Доказательства следующих двух теорем можно найти в [10].

Теорема 42 (Борсук-Хадвигер). Шар диаметра 1 нельзя разбить на три части меньшего диаметра, но можно разбить на четыре части диаметра $\sqrt{3} + \sqrt{3}/6$, причем на четыре части меньшего диаметра — нельзя.

Теорема 43 (Грюнбаум). Тело диаметра 1 можно разбить на четыре части диаметра, меньшего 0,989.

В 1997 была доказана следующая

Теорема 44 (В.В.Макеев). Тело диаметра 1 можно разбить на четыре части диаметра, меньшего 0,98.

Однако ее доказательство не элементарно.

Борсук предположил, что любое ограниченное множество в n -мерном пространстве можно разбить на $n + 1$ подмножество меньшего диаметра. Эта гипотеза была доказана для любых *гладких* тел, в частности для шара, однако для произвольных тел она оказалась неверной, и недавно была опровергнута в пространствах большого числа измерений (см. об этом популярную статью [62] и книгу [60]).

2.15 Приближение выпуклых фигур многоугольниками

Произвольные выпуклые фигуры уже появлялись в этой книжке. Их изучение в свое время вызывало большой интерес, и изложению достигнутых результатов посвящено несколько книг (из имеющихся на русском языке см. например [77, 42, 10, 26, 25, 12, 69]). Эта тема интересна тем, что она достаточно элементарна, и многие факты могут быть рассказаны школьникам. Далее мы предлагаем подборку задач о выпуклых фигурах, тематически и идейно связанных с предыдущим изложением.

В указанной тематике весьма естественной является следующая тема Начинаем, как всегда, с несложных задач.

❶ 458. Для любой выпуклой фигуры M единичной площади и любого ϵ , $0 < \epsilon < 1$, можно найти содержащий M выпуклый многоугольник площади $1 + \epsilon$ и содержащийся в M выпуклый многоугольник площади $1 - \epsilon$.

❶ 459. В выпуклую фигуру площади 1 можно поместить треугольник площади $1/4$, и можно ее накрыть треугольником площади 4.

Следующая теорема доказана в 1927 г. немецким математиком Т.Эстерманом.

❖460*. Выпуклую фигуру площади 1 можно заключить в параллелограмм площади 2. Треугольник площади 1 нельзя заключить в параллелограмм площади меньшей 2.

Следующая теорема доказана в 1918 г. немецким математиком В. Гроссом.

❖461**. Выпуклую фигуру площади 1 можно заключить в треугольник площади 2. Параллелограмм площади 1 нельзя заключить в треугольник площади меньшей 2.

Указание. Впишем в M треугольник ABC наибольшей площади, обозначим его высоты h_a, h_b, h_c , построим треугольник $A_1B_1C_1$ так, чтобы его средние линии образовывали треугольник ABC (C оказалась серединой A_1B_1 и т.д.), выберем в пересечении M с треугольником A_1BC точку A_2 , наиболее удаленную от прямой BC , обозначим расстояние от нее до этой прямой через d_A , и аналогично выберем точки B_2, C_2 и определим расстояния d_B, d_C (возможно, что выбор точек A, B, C, A_2, B_2, C_2 неоднозначен). Заметим, что M содержится внутри треугольника ABC , так как в противном случае в M нашлась бы точка, удаленная от одной из его сторон на расстояние, большее опущенной в этом треугольнике на эту сторону высоты, и тогда эта точка образовывала бы с этой стороной треугольник большей площади, чем ABC , что противоречит выбору треугольника ABC . Если площадь треугольника ABC не больше $1/2$, то все доказано, так как тогда площадь треугольника $A_1B_1C_1$ не больше 2. В противном случае проведем через A_2 прямую, параллельную BC , и аналогично проведем прямые через B_2 и C_2 . Эти прямые образуют треугольник $A_3B_3C_3$ накрывающий, что доказывается также, как накрытие треугольником $A_1B_1C_1$.

Многоугольник (в невырожденном случае, вообще говоря, шестиугольник) $AC_2BA_2CB_2$ обозначим M_2 , а его площадь — через s_2 . В силу выпуклости он содержится в нем. Положим для краткости

$$\kappa_a = \frac{d_a}{h_a}, \kappa_b = \frac{d_b}{h_b}, \kappa_c = \frac{d_c}{h_c}$$

Можно проверить, что

$$1 = s(M) \geq s_2 = S_{ABC} \left(1 + \kappa_a + \kappa_b + \kappa_c \frac{d_c}{h_c} \right),$$

где $S_{ABC} > 1/2$ — площадь треугольника ABC , откуда имеем

$$S_{ABC} \leq \frac{1}{1 + \kappa_a + \kappa_b + \kappa_c}, \quad \kappa_a + \kappa_b + \kappa_c < 1.$$

Можно проверить, что коэффициент подобия треугольников $A_3B_3C_3$ и ABC равен $1 + \kappa_a + \kappa_b + \kappa_c$, откуда

$$S_{A_3B_3C_3} = (1 + \kappa_a + \kappa_b + \kappa_c)^2 S_{ABC} \leq 1 + \kappa_a + \kappa_b + \kappa_c < 2.$$

Следующая теорема принадлежит известному швейцарскому математику Г.Хадвигеру.

462. Выпуклую фигуру площади 1 можно накрыть прямоугольником площади 2. Это неравенство нельзя усилить даже для центрально-симметричных фигур.

Указание. Проведем через концы диаметра фигуры перпендикулярные к нему прямые, которые будут опорными для данной фигуры. Проведем еще пару опорных для нее прямых, параллельных диаметру. Полученный прямоугольник содержит фигуру, а она содержит вписанный в него четырехугольник вдвое меньшей площади, у которого диагональ совпадает с рассматриваемым диаметром. Ромб с единичной стороной и высотой ϵ имеет площадь $s = \epsilon$, ширину ϵ , диаметр $> 2 - \epsilon$. Если его накрыть прямоугольником $a \times b$, $a \leq b$, то $a \geq \epsilon$, $a^2 + b^2 > (2 - \epsilon)^2$, откуда

$$a^2 b^2 > ((2 - \epsilon)^2 - \epsilon^2) \epsilon^2 = (4 - 4\epsilon) \epsilon^2,$$

$$ab > 2\epsilon \sqrt{1 - \epsilon} = 2\sqrt{1 - \epsilon} \epsilon.$$

463. Выпуклую фигуру можно накрыть прямоугольником и внутрь ее поместить прямоугольник так, что их стороны будут попарно параллельны и в одной паре отношение длин будет равно 2, а в другой паре — 4.

Указание. Проведем через середину диаметра фигуры перпендикулярное ему сечение и рассмотрим вписанный в нее четырехугольник, у которого данные диаметр и сечение являются перпендикулярными диагоналями. Проведем через вершины этого четырехугольника опорные прямые к данной фигуре. Они образуют накрывающую эту фигуру трапецию, площадь которой равна произведению диаметра на длину сечения (которое играет роль ее средней линии), и поэтому вдвое больше площади рассматриваемого четырехугольника. Прямоугольник, образованный серединами сторон четырехугольника, имеет вдвое меньшую, чем он, площадь. Данную трапецию можно накрыть прямоугольником вдвое большей площади и той же высоты.

❧ 464. В выпуклую фигуру площади 1 можно поместить прямоугольник площади $1/4$.

❧ 465. Выпуклую фигуру можно накрыть параллелограммом и внутрь ее поместить параллелограмм так, что они будут гомотетичны с коэффициентом 2. Для треугольника уменьшить этот коэффициент нельзя.

Указание. Впишем в фигуру четырехугольник наибольшей площади. Ясно, что его вершины должны лежать на границе фигуры. Существование такого четырехугольника можно доказать элементарно, если данная фигура является многоугольником. Действительно, тогда передвигая вершину четырехугольника по сторонам фигуры и замечая, что его площадь линейно зависит от положения этой вершины, получаем, что максимальное значение эта площадь имеет, когда эта вершина четырехугольника совпадет с вершиной данного многоугольника. Повторяя эту процедуру, можно считать, что все вершины четырехугольника лежат в вершинах данного многоугольника. Но таких четырехугольников конечное число, и среди них можно выбрать максимальный. Проведем через его вершины прямые, параллельные его диагоналям. Полученный параллелограмм содержит в себе данную фигуру. Середины сторон рассматриваемого четырех-

угольника тоже образуют параллелограмм, гомотетичный первому с коэффициентом 2, и лежащий внутри данной фигуры.

❖ 466. Для треугольника отношение площадей объемлемого и объемлющего параллелограммов не меньше 4, причем это неравенство достижимо.

❖ 467. (Москва, 1984) В треугольник площади 1 нельзя поместить параллелограмм площади большей $1/2$.

❖ 468**. (В. Зюсс) В выпуклую фигуру площади 1 можно поместить параллелограмм площади $1/2$.

❖ 469. Выпуклую фигуру можно накрыть треугольником и внутрь ее поместить треугольник так, что они будут гомотетичны с коэффициентом 2. Для параллелограмма и круга уменьшить этот коэффициент нельзя.

Указание. Впишите в фигуру треугольник максимальной площади и докажите, что треугольник, у которого он является средним треугольником (образованным средними линиями) удовлетворяет условиям задачи.

❖ 470. Выпуклую центрально-симметричную фигуру можно накрыть параллелограммом и внутрь ее поместить параллелограмм так, что отношение их площадей будет равно 2.

Указание. Как и в задаче 465 впишем в фигуру четырехугольник максимальной площади. Можно его выбрать центрально-симметричным, т.е. параллелограммом, иначе существовал бы центрально-симметричный ему относительно центра симметрии фигуры другой вписанный четырехугольник имеет общий с ним описанный параллелограмм, но тогда в качестве максимального вписанного четырехугольника можно взять параллелограмм, образованный серединами сторон описанного параллелограмма. Этот параллелограмм имеет вдвое большую площадь, чем вписанный в него.

Следующую задачу автор предлагал на Московскую олимпиаду.

☉ 471. (Москва, 1992) В выпуклую центрально-симметричную фигуру можно поместить ромб вдвое меньшей площади.

Указание. Диаметр фигуры проходит через центр симметрии. Проведем через него перпендикулярное диаметру сечение фигуры. Оно вместе с диаметром образует вписанный в фигуру ромб, площадь которого вдвое меньше площади трапеции (на самом деле параллелограмма), описанной вокруг данной фигуры (см. указание к задаче 463).

☉ 472. В выпуклый центрально-симметричный шестиугольник площади 1 можно поместить параллелограмм площади $2/3$. В правильный шестиугольник площади 1 нельзя поместить параллелограмм большей площади. Правильный шестиугольника площади 1 нельзя накрыть параллелограммом площади, меньшей $4/3$, а параллелограммом площади $4/3$ можно.

Ч. Пети доказал, что любую центрально-симметричную фигуру единичной площади можно накрыть параллелограммом площади $4/3$.

А вот еще одна теорема В.Гросса.

☉ 473. В выпуклую фигуру можно поместить треугольник, и можно ее накрыть треугольником так, что отношение их площадей будет не больше 4. Для круга эти оценки улучшить нельзя.

Указание. См. указание к задаче 461. Примените теорему 1.

☉ 474*. В выпуклую фигуру площади 1 можно поместить треугольник площади $3/8$, одна из сторон которого параллельна заданной прямой, причем это неравенство — точное.

Усиление предыдущей задачи дает следующая теорема

☉ 475**. (Бляшке) В выпуклую фигуру площади 1 можно поместить треугольник площади $\frac{3\sqrt{3}}{4\pi} > \frac{3}{8}$. В эллипс площади 1 поместить треугольник площади, большей $\frac{3\sqrt{3}}{4\pi}$ нельзя, а в фигуру, отличную от эллипса — можно.

Обобщением предыдущей теоремы является

Теорема 45 (Бляшке-Сасс). В любую выпуклую фигуру площади 1 можно поместить выпуклый n -угольник площади $\frac{n}{2\pi} \sin \frac{2\pi}{n}$, причем в эллипс площади 1 поместить n -угольник площади, большей $\frac{n}{2\pi} \sin \frac{2\pi}{n}$ нельзя, а в фигуру, отличную от эллипса — можно.

Указание. Выберем в фигуре любой диаметр и построим на нем круг. Для простоты выкладок полагаем диаметр равным 2, а центр круга совпадающим с началом координат. Рассмотрим множество всех вписанных в круг правильных n -угольников. Координаты вершин этих n -угольников имеют вид

$$(\cos(t + 2\pi k/n), \sin(t + 2\pi k/n)), \quad k = 0, \dots, n-1.$$

Спроектируем вершины указанного n -угольника на границу данной кривой и получим вписанный в нее n -угольник $T_n(t)$ с вершинами

$$(\cos(t + 2\pi k/n), e(t) \sin(t + 2\pi k/n)), \quad k = 0, \dots, n-1.$$

Вычислим его площадь, разбив его на треугольники с общей вершиной в начале координат. Вычисляя площадь каждого из них по формуле задачи 165 и суммируя их, имеем формулу для площади

$$T_n(t) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n e(t_i) \sin t_i (\cos t_{i-1} - \cos t_{i+1}),$$

где $t_i = t + 2\pi i/n \bmod 2\pi$, в частности $t_0 = t$, $t_{n+1} = t + 2\pi(n+1)/n = t + 2\pi/n = t_1$. Применяя формулу преобразования разности косинусов в произведение синусов, получаем более симметричную формулу

$$T_n(t) = \sin \frac{2\pi}{n} \sum_{i=0}^{n-1} e(t_i) \sin^2 t_i.$$

Положим $\phi_k = 2\pi k/N$, $k = 0, \dots, N-1$, и рассмотрим среднее арифметическое

$$\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} T_n(\phi_k) = \frac{\sin \frac{2\pi}{n}}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{i=0}^{n-1} e(\phi_k + 2\pi i/n) \sin^2(\phi_k + 2\pi i/n),$$

Меняя в двойной сумме порядок суммирования, имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} T_n(\phi_k) &= \frac{\sin \frac{2\pi}{n}}{N} \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{N-1} e\left(\frac{2\pi k}{N} + \frac{2\pi i}{n}\right) \sin^2\left(\frac{2\pi k}{N} + \frac{2\pi i}{n}\right) \\ &= \frac{\sin \frac{2\pi}{n}}{N \sin \frac{2\pi}{N}} \sum_{i=0}^{n-1} T_N(2\pi i/n), \end{aligned}$$

где

$$T_N(2\pi i/n) = \sin \frac{2\pi}{N} \sum_{k=0}^{N-1} e\left(\frac{2\pi k}{N} + \frac{2\pi i}{n}\right) \sin^2\left(\frac{2\pi k}{N} + \frac{2\pi i}{n}\right)$$

— площадь вписанного в данную фигуру N -угольника $T_N\left(\frac{2\pi i}{n}\right)$. Для произвольного $\epsilon > 0$ можно выбрать $N = N(\epsilon)$ так, что

$$T_N(2\pi i/n) > S(1 - \epsilon),$$

где S — площадь данной фигуры (она уже не обязательно единичная, т.к. выше мы фактически выполнили преобразование подобия).¹³ Тогда имеем

$$\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} T_n(\phi_k) = \frac{\sin \frac{2\pi}{n}}{N \sin \frac{2\pi}{N}} \sum_{i=0}^{n-1} T_N(2\pi i/n) > \frac{(1 - \epsilon) S n \sin \frac{2\pi}{n}}{N \sin \frac{2\pi}{N}}.$$

Так как $N \sin \frac{2\pi}{N}$ есть периметр правильного $N/2$ -угольника, вписанного в окружность единичного радиуса, то

$$N \sin \frac{2\pi}{N} < 2\pi,$$

откуда следует неравенство

$$\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} T_n(\phi_k) > \frac{(1 - \epsilon) S n}{2\pi} \sin \frac{2\pi}{n}.$$

¹³Заметим, что это наименее обоснованное место рассуждения (хотя на первый взгляд очевидное). Оно заменяет в доказательстве Сасса использование интегрального исчисления. Для его строгого обоснования нужно знать теорию пределов и строгую теорию площади (жордановой меры). Впрочем, если данная фигура — многоугольник, то знание жордановой меры не нужно.

Из этого неравенства имеем, что для некоторого $k = 0, \dots, N-1$

$$T_n(\phi_k) > \frac{(1-\epsilon)Sn}{2\pi} \sin \frac{2\pi}{n}.$$

Значит при любом $\epsilon > 0$ в фигуру площади S можно поместить n -угольник площади, более $\frac{(1-\epsilon)Sn}{2\pi} \sin \frac{2\pi}{n}$. Переходя к пределу, получаем существование помещенного в фигуру единичной площади n -угольника, у которого площадь не менее $\frac{n}{2\pi} \sin \frac{2\pi}{n}$.

Тот факт, что для любой фигуры, отличной от эллипса, можно получить *строгое* неравенство, Фейеш-Тот доказал с помощью некоторых фактов из теории рядов Фурье, и поэтому мы не можем поместить это доказательство здесь.

❖ 476*. Эллипс площади 1 можно накрыть n -угольником площади $\frac{n}{\pi} \sin \frac{\pi}{n}$, а n -угольником меньшей площади нельзя.

❖ 477. Используя задачу 461, покажите, что для *покрытия* n -угольниками эллипс не является экстремальной фигурой при $n = 3$.

Следующая теорема принадлежит Фейеш-Тоту.

❖ 478. Докажите, что каждую выпуклую фигуру можно заключить между двумя выпуклыми n -угольниками такими, что периметр большего превосходит периметр меньшего в $\frac{1}{\cos(\frac{\pi}{n})}$ раз. Эта оценка не может быть усилена для круга.

Указание. Рассмотрим правильный n -угольник, накрывающий данную фигуру. Передвигая его стороны параллельно самим себе, добьемся их касания с фигурой. Получим описанный вокруг нее равноугольный n -угольник. Выбирая на его сторонах по одной точке касания, получаем вписанный в фигуру n -угольник. Эта пара n -угольников искомая. Действительно, если A, B — соседние вершины вписанного n -угольника, а C — лежащая между ними вершина описанного, то $\angle ACB = \pi(n-2)/n$, то в силу задачи 42 $(AC + CB)/AB$ максимально в случае равнобедренного треугольника, поэтому $AC + CB \leq AB/\cos(\pi/n)$. Суммируя эти неравенства, получаем $P_n \leq p_n/\cos(\pi/n)$.

Доказательство следующих теорем можно найти в [69].

Теорема 46 (Фейеш-Тот). Каждую выпуклую фигуру можно заключить между двумя выпуклыми n -угольниками такими, что площадь большего превосходит площадь меньшего в $\frac{1}{\cos^2(\frac{\pi}{n})}$ раз. Эта оценка не может быть усилена для круга.

Теорема 47 (Дюкер). Обозначим вписанный в данную выпуклую фигуру n -угольник максимальной площади T_n , а описанный вокруг нее n -угольник минимальной площади U_n и также обозначим их площади. Тогда последовательность T_n выпукла вверх, т.е. $T_{n-1} + T_{n+1} \leq 2T_n$, а последовательность U_n выпукла вниз, т.е. $U_{n-1} + U_{n+1} \geq 2U_n$, $n \geq 4$.

Подобную теорему для периметров доказал Й.Мольнар [69].

Известна также следующая теорема, из которой вытекают экстремальные свойства вписанных в окружность и описанных вокруг окружности n -угольников.

Теорема 48. Среди всех выпуклых n -угольников, вписанных в данный эллипс, наибольший периметр имеет n -угольник, вписанный в софокусный¹⁴ эллипс. Среди всех выпуклых n -угольников, описанных вокруг данного эллипса, наименьший периметр имеет тот, который вписан в софокусный эллипс.

Доказательство можно найти в [6].

Известно, что среди эллипсов, накрывающих данную выпуклую фигуру, имеется единственный эллипс минимальной площади, и среди эллипсов, содержащихся в данной фигуре, имеется единственный эллипс максимальной площади. Аналогичные факты верны и в многомерном пространстве, а соответствующие эллипсоиды называются эллипсоидами Лёвнера.

❖ **479*.** Докажите теорему Лёвнера для центрально-симметричных выпуклых множеств.

Указание. Минимальный эллипс концентричен с данной фигурой. Действительно, в противном случае эллипс симметричный минимальному относительно центра фигуры также ее содержит, поэтому и пересечение эллипсов ее содержит, но это

¹⁴Эллипсы софокусные, если у них совпадают фокусы.

пересечение можно накрыть эллипсом меньшей площади (для доказательства этого достаточно сделать аффинное преобразование, переводящее эти эллипсы в равные круги, и заметить, что их пересечение накрывается меньшим кругом), что ведет к противоречию. Если минимальных эллипсов два, то сделав аффинное преобразование, можно считать один из них кругом и в соответствующей системе координат их уравнения принимают вид $x^2 + y^2 \leq 1$, $(x/a)^2 + (y/b)^2 \leq 1$, $ab = 1$. Тогда эллипс $x^2(1 + 1/a^2) + y^2(1 + 1/b^2) \leq 2$ тоже накрывает данную фигуру, а квадрат его площади, деленной на π^2 , равен

$$\frac{2}{1 + 1/a^2} \frac{2}{1 + 1/b^2},$$

и согласно неравенству о среднем арифметическом и среднем геометрическом он меньше $(ab)^2 = 1$, что опять дает противоречие.

480*. Докажите теорему Лёвнера для произвольных выпуклых множеств.

Эта теорема верна и в n -мерном пространстве.

Следующая теорема была доказана американским математиком Ф.Джоном с целью применения в функциональном анализе (теории банаховых пространств).

481*. (Ф.Джон) Докажите, что центрально-симметричное выпуклое множество всегда можно заключить между двумя гомотетичными с коэффициентом $\sqrt{2}$ эллипсами.

Указание. Накроем фигуру минимальным эллипсом Лёвнера. Сделав аффинное преобразование, можно считать, что это единичный круг. Допустим, что фигура содержит граничную точку, удаленную от центра круга на расстояние меньшее $1/\sqrt{2}$, и придем к противоречию. Можно считать, что ближайшая к центру эта точка имеет координаты $(0, \lambda)$, где $\lambda < 1/\sqrt{2}$. Тогда данная фигура содержит круг $x^2 + y^2 \leq \lambda^2$, поэтому прямая $y = \lambda$ является опорной к этой фигуре, и поэтому прямая $y = -\lambda$ тоже, значит фигура лежит в области $x^2 + y^2 \leq 1$, $|y| \leq \lambda$. Накроем эту

область эллипсом $(x/a)^2 + (y/b)^2 = 1$, $(1 - \lambda^2)/a^2 + (\lambda/b)^2 = 1$. Его площадь равна

$$\pi ab = \pi \frac{a\lambda}{\sqrt{1 - (1 - \lambda^2)/a^2}}$$

Она будет меньше π , если $(a\lambda)^2 < 1 - (1 - \lambda^2)/a^2$, т.е. например, при $a^4 = (1 - \lambda^2)/\lambda^2$, так как $2\sqrt{1 - \lambda^2}\lambda < 1$. Получается противоречие с выбором минимального покрывающего эллипса.

482*. Докажите, что параллелограмм нельзя заключить между двумя гомотетичными с коэффициентом $\sqrt{2}$ эллипсами.

483*. Докажите, что единичный квадрат нельзя заключить в эллипс площади меньше $\pi/2$, и в него нельзя поместить эллипс площади $\pi/4$.

484. В центрально-симметричную выпуклую фигуру площади 1 можно поместить прямоугольник площади $1/\pi$.

Указание. Примените задачу 481.

485**. (Ф. Джон) Докажите, что выпуклое множество всегда можно заключить между двумя гомотетичными с коэффициентом 2 эллипсами.

486*. Докажите, что треугольник нельзя заключить между двумя гомотетичными с коэффициентом 2 эллипсами.

2.16 Линейные системы выпуклых фигур и смешанные площади

Для любого α , $0 < \alpha < 1$ и любых двух плоских множеств A и B обозначим $\alpha A + (1 - \alpha)B$ множество всех точек, делящих в данном отношении $1 - \alpha : \alpha$ отрезки, у которых первый конец принадлежит A , а второй — B . При $\alpha = 1/2$ это определение переходит в определение полусуммы множеств. В вырожденных

случаях $\alpha = 0$ или 1 множество $\alpha A + (1 - \alpha)B$ совпадает с B или A соответственно.

Следующие задачи являются, в основном, обобщениями соответствующих задач из раздела 2.4. Решения большинства из них можно найти в [77, 16, 17].

487. Если множества A и B параллельно передвинуть (возможно на разные вектора), то множество $\alpha A + (1 - \alpha)B$ тоже параллельно передвинется.

488. Если множества A и B выпуклы, то и множество $\alpha A + (1 - \alpha)B$ тоже.

Далее рассматриваем только выпуклые множества.

489. Симметризация Штейнера относительно одной и той же оси фигур $A, B, \alpha A + (1 - \alpha)B$ удовлетворяет условию выпуклости

$$\alpha A^S + (1 - \alpha)B^S \subset (\alpha A + (1 - \alpha)B)^S.$$

490. Если n -угольники A и B имеют соответственно параллельные стороны a_i, b_i , то $\alpha A + (1 - \alpha)B$ есть n -угольник со сторонами $\alpha a_i + (1 - \alpha)b_i$, соответственно параллельными сторонам a_i, b_i .

491. Если множества A и B имеют периметры p_A, p_B , то множество $\alpha A + (1 - \alpha)B$ имеет периметр $\alpha p_A + (1 - \alpha)p_B$.

Указание. Докажите это сначала для n -угольников A и B с соответственно параллельными сторонами, потом для произвольных многоугольников, вводя фиктивные стороны нулевой длины, а потом перейдите к пределу.

492. Если множества A и B имеют диаметры D_A, D_B , то множество $\alpha A + (1 - \alpha)B$ имеет диаметр не больший $\alpha D_A + (1 - \alpha)D_B$.

493. Если множества A и B имеют ширину b_A, b_B , то множество $\alpha A + (1 - \alpha)B$ имеет ширину не меньшую $\alpha b_A + (1 - \alpha)b_B$.

494. Если множества A и B имеют внешние радиусы R_A, R_B , то множество $\alpha A + (1 - \alpha)B$ имеет внешний радиус не меньший $\alpha R_A + (1 - \alpha)R_B$.

495. Если множества A и B имеют внутренние радиусы R_A, R_B , то множество $\alpha A + (1 - \alpha)B$ имеет внутренний радиус не больший $\alpha R_A + (1 - \alpha)R_B$.

496. Докажите, что полусумма множества $2A$ (гомотетично с коэффициентом 2 множеству A) и окружности радиуса 2ϵ равна ϵ -окрестности множества A .

497. Верно ли, что полусумма кругов — круг?

498*. Верно ли, что полусумма эллипсов — эллипс?

Смешанной площадью $S(A, B)$ выпуклых фигур A, B называется удвоенная площадь фигуры $\frac{1}{2}(A + B)$, уменьшенная на полусумму площадей фигур A, B .

499. Если множества A и B параллельно передвинуть (возможно на разные вектора), то смешанная площадь не изменится.

500. Смешанная площадь площади многоугольника и отрезка единичной длины равна длине проекции многоугольника на прямую, перпендикулярную этому отрезку.

501. Пусть A, B — есть n -угольники с соответственно параллельными сторонами, и точка O лежит внутри их обоих. Обозначим их соответственно параллельные стороны a_i, a'_i , и опущенные из O на них высоты через h_i, h'_i , $i = 1, \dots, n$. Докажите, что

$$2S(A) = \sum_{i=1}^n a_i h_i, \quad 2S(B) = \sum_{i=1}^n a'_i h'_i,$$

$$2S(A, B) = \sum_{i=1}^n a'_i h_i + \sum_{i=1}^n a_i h'_i,$$

$$S(\alpha A + (1 - \alpha)B) = \alpha^2 S(A) + \alpha(1 - \alpha)S(A, B) + (1 - \alpha)^2 S(B).$$

Указание. Согласно задаче 490 у n -угольника $\alpha A + (1-\alpha)B$ стороны равны $\alpha a_i + (1-\alpha)a'_i$, а высоты, опущенные из O на них, равны $\alpha h_i + (1-\alpha)h'_i$. Тогда

$$S(\alpha A + (1-\alpha)B) = \sum_{i=1}^n (\alpha a_i + (1-\alpha)a'_i)(\alpha h_i + (1-\alpha)h'_i).$$

502*. В условиях предыдущей задачи докажите, что

$$2S(A, B) = \sum_{i=1}^n a'_i h_i = \sum_{i=1}^n a_i h'_i.$$

Указание. Пусть OC_i — перпендикуляр, опущенный из O на сторону $A_i A_{i+1}$ n -угольника A длины a_i (или ее продолжение) и аналогично определим перпендикуляры OC'_i для n -угольника B (при $i = n$ под $i+1$ понимаем, естественно, 1.) Тогда площадь n -угольника $A_1 C'_1 A_2 \dots A_n C'_n A_1$ равна

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n a_i h'_i$$

(это вытекает из того, что площадь четырехугольника $OA_i C'_i A_{i+1}$ равна полупроизведению его перпендикулярных диагоналей), и аналогично площадь n -угольника $A'_1 C_1 A'_2 \dots A'_n C_n A'_1$ равна

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n a'_i h_i.$$

Треугольники $A_i A'_i C_i$ и $A_i C'_i A_i$ имеют общее основание и равные высоты, и поэтому равновелики. Отсюда вытекает, что площади n -угольников $A'_1 C_1 A'_2 \dots A'_n C_n A'_1$ и $A_1 C'_1 A_2 \dots A_n C'_n A_1$ равны.

503. Докажите формулу для произвольных выпуклых многоугольников A, B .

$$S(\alpha A + (1-\alpha)B) = \alpha^2 S(A) + \alpha(1-\alpha)S(A, B) + (1-\alpha)^2 S(B)$$

Указание. Добавим формально стороны с нулевой длиной, можно считать, что многоугольники A, B имеют попарно параллельные стороны.

☞ 504*. Смешанная площадь площадь двух многоугольников с попарно параллельными сторонами, один из которых описан вокруг окружности единичного радиуса, равна половине периметра другого многоугольника.

Указание. Примените задачу 502.

☞ 505*. Смешанная площадь площадь выпуклой фигуры и единичного круга равна половине периметра этой фигуры.

Указание. Переход к пределу в предыдущей задаче.

☞ 506*. Докажите формулу для площади фигуры

$$S(\alpha A + (1 - \alpha)B) = \alpha^2 S(A) + \alpha(1 - \alpha)S(A, B) + (1 - \alpha)^2 S(B)$$

Указание. Переход к пределу в предыдущей задаче.

2.17 Неравенство Брунна—Минковского

Теорема 49 (Брунн—Минковский). Если множества A и B выпуклы и имеют площади s_A, s_B , а множество $\alpha A + (1 - \alpha)B$ имеет площадь s , то $\sqrt{s} \geq \alpha\sqrt{s_A} + (1 - \alpha)\sqrt{s_B}$. Равенство возможно лишь когда фигуры гомотетичны.

☞ 507. Проверьте, что теорема Брунна—Минковского равносильна следующему утверждению. Если множества A и B выпуклы, то их смешанная площадь не меньше среднего геометрического площадей A и B . Равенство возможно лишь когда фигуры гомотетичны.

☞ 508***. Докажите, что если множества A и B выпуклы, то их смешанная площадь не меньше среднего геометрического площадей A и B . Равенство возможно лишь когда фигуры гомотетичны.

Указание. Докажем только неравенство, используя метод Фробениуса (см. [42]). Опишем вокруг A, B правильные треугольники $X_1Y_1Z_1, X_2Y_2Z_2$ с соответственно параллельными сторонами. Опишем вокруг A равноугольный $3n$ -угольник M_1 , три стороны которого лежат на сторонах треугольника $X_1Y_1Z_1$, и аналогично построим $3n$ -угольник M_2 , описанный вокруг B . Для любого $\epsilon > 0$ выберем $n = n(\epsilon)$ так, что

$$S(A) < S(M_1) < S(A) + \epsilon, \quad S(B) < S(M_2) < S(B) + \epsilon,$$

$$S(A, B) - \epsilon < S(M_1, M_2) < S(A, B) + \epsilon.$$

Продолжим i -ю сторону M_1 до пересечения со сторонами треугольника $X_1Y_1Z_1$ (если она лежит на стороне, то в качестве продолжения берем саму эту сторону), и рассмотрим продолжение $i + 1$ стороны. Эти две прямые высекают из треугольника $X_1Y_1Z_1$ два треугольника с вертикальными углами. Выберем из них тот, направление на который из его вершины соответствует ориентации, например, по часовой стрелке. Обозначим этот треугольник Δ_i , а его боковые стороны l_i, r_i , тогда его площадь равна

$$\Delta_i = \frac{1}{2} l_i r_i \sin \frac{2\pi}{3n},$$

а так как объединение всех этих треугольников покрывает фигуру $\Delta X_1Y_1Z_1 \setminus M_1$, то

$$S_1 - S(M_1) = \sum_{i=1}^{3n} \Delta_i = \frac{\sin \frac{2\pi}{3n}}{2} \sum_{i=1}^{3n} l_i r_i,$$

где $S_1 = S(X_1Y_1Z_1)$. Аналогично имеем

$$S_2 - S(M_2) = \frac{\sin \frac{2\pi}{3n}}{2} \sum_{i=1}^{3n} l'_i r'_i,$$

где $S_2 = S(X_2Y_2Z_2)$ и длины боковых сторон маленьких треугольников обозначены l'_i, r'_i . Рассмотрим фигуру $\alpha A + (1-\alpha)B$, тогда вокруг нее описан правильный треугольник

$$\Delta XYZ = \alpha \Delta X_1Y_1Z_1 + (1-\alpha) \Delta X_2Y_2Z_2$$

площади S , стороны которого параллельны сторонам $\triangle X_i Y_i Z_i$, и равноугольный $3n$ -угольник $M = \alpha M_1 + (1 - \alpha) M_2$, стороны которого параллельны сторонам M_i . Аналогично случаю многоугольников M_i его можно разбить на треугольники с углами при вершине $\sin 2\pi/3n$ и боковыми сторонами $\alpha l_i + (1 - \alpha) l'_i$, $\alpha r_i + (1 - \alpha) r'_i$ (согласно задаче 490). Поэтому

$$S - S(M) = \frac{\sin \frac{2\pi}{3n}}{2} \sum_{i=1}^{3n} (\alpha l_i + (1 - \alpha) l'_i)(\alpha r_i + (1 - \alpha) r'_i).$$

Отсюда в силу подобия треугольников $\triangle X_i Y_i Z_i, \triangle XYZ$ имеем

$$\begin{aligned} S(M) &= \\ &= (\alpha \sqrt{S_1} + (1 - \alpha) \sqrt{S_2})^2 - \frac{\sin \frac{2\pi}{3n}}{2} \sum_{i=1}^{3n} (\alpha l_i + (1 - \alpha) l'_i)(\alpha r_i + (1 - \alpha) r'_i) = \\ &= \alpha^2 S_1 + (1 - \alpha)^2 S_2 + 2\alpha(1 - \alpha) \sqrt{S_1 S_2} - \\ &\quad - \frac{\sin \frac{2\pi}{3n}}{2} \sum_{i=1}^{3n} \alpha^2 l_i l'_i + (1 - \alpha)^2 r_i r'_i + \alpha(1 - \alpha)(l_i r'_i + l'_i r_i) = \\ &= \alpha^2 \left(S_1 - \frac{\sin \frac{2\pi}{3n}}{2} \sum_{i=1}^{3n} l_i l'_i \right) + (1 - \alpha)^2 \left(S_2 - \frac{\sin \frac{2\pi}{3n}}{2} \sum_{i=1}^{3n} r_i r'_i \right) + \\ &\quad + \alpha(1 - \alpha) \left(2\sqrt{S_1 S_2} - \frac{\sin \frac{2\pi}{3n}}{2} \sum_{i=1}^{3n} (l_i r'_i + l'_i r_i) \right). \end{aligned}$$

Но согласно задаче 503

$$S(M) = \alpha^2 S(M_1) + (1 - \alpha)^2 S(M_2) + 2\alpha(1 - \alpha) S(M_1, M_2).$$

Поэтому

$$2S(M_1, M_2) = 2\sqrt{S_1 S_2} - \frac{\sin \frac{2\pi}{3n}}{2} \sum_{i=1}^{3n} (l_i r'_i + l'_i r_i).$$

При стремлении n к бесконечности $r_i - l_i$ и $r'_i - l'_i$ стремятся к нулю. Поэтому $n = n(\epsilon)$ можно выбрать так, что

$$S(M_1) < S_1 - \frac{\sin \frac{2\pi}{3n}}{2} \sum_{i=1}^{3n} l_i^2 + \epsilon,$$

$$S(M_2) < S_2 - \frac{\sin \frac{2\pi}{3n}}{2} \sum_{i=1}^{3n} (l'_i)^2 + \epsilon,$$

$$S(M_1, M_2) > \sqrt{S_1 S_2} - \frac{\sin \frac{2\pi}{3n}}{2} \sum_{i=1}^{3n} l_i l'_i - \epsilon.$$

Согласно неравенству Коши-Буняковского

$$\sum_{i=1}^{3n} (l'_i)^2 \sum_{i=1}^{3n} l_i^2 \geq \left(\sum_{i=1}^{3n} l_i l'_i \right)^2.$$

Применяя неравенство

$$a_1 a_2 - b_1 b_2 \geq \sqrt{a_1^2 - b_1^2} \sqrt{a_2^2 - b_2^2},$$

верное, если все разности неотрицательны, имеем

$$\begin{aligned} \sqrt{S_1 S_2} - \frac{\sin \frac{2\pi}{3n}}{2} \sum_{i=1}^{3n} l_i l'_i &\geq \sqrt{S_1 S_2} - \frac{\sin \frac{2\pi}{3n}}{2} \sqrt{\sum_{i=1}^{3n} (l'_i)^2 \sum_{i=1}^{3n} l_i^2} \geq \\ &\geq \sqrt{S_1 - \frac{\sin \frac{2\pi}{3n}}{2} \sum_{i=1}^{3n} l_i^2} \sqrt{S_2 - \frac{\sin \frac{2\pi}{3n}}{2} \sum_{i=1}^{3n} (l'_i)^2}, \end{aligned}$$

откуда следует, что

$$S(M_1, M_2) - \epsilon \geq \sqrt{S(M_1) - \epsilon} \sqrt{S(M_2) - \epsilon}.$$

Так как $\epsilon > 0$ произвольно, то отсюда имеем

$$S(M_1, M_2) \geq \sqrt{S(M_1)} \sqrt{S(M_2)}.$$

Нахождение условий обращения этого неравенства в равенство требует использования интегрального исчисления, и поэтому здесь не приводится.

Неравенство Брунна—Минковского имеет много разных доказательств. В [16, 17] можно найти доказательство Б.Н. Делоне [29]. Еще одно доказательство можно получить с помощью симметризации Штейнера, теоремы 23 и задачи 489.

❖ 509. Если множества A и B выпуклы, то площадь их полусуммы не меньше среднего геометрического их площадей. Равенство возможно лишь когда фигуры равны.

Указание. Применить теорему Брунна—Минковского.

❖ 510. Докажите, что при симметризации выпуклого множества его площадь не уменьшается, а если он не был центрально-симметричным, то увеличивается.

Указание. Применить теорему Брунна—Минковского.

Следующая теорема уже встречалась в разделе 2.1. Сейчас можно получить ее другое доказательство.

Теорема 50 (Люилье). *Среди всех выпуклых n -угольников с данным периметром и данными направлениями сторон наибольшую площадь имеет описанный вокруг окружности.*

Указание. Применить теорему Брунна—Минковского.

Теорема 51 (Роджерс—Шепард). *При симметризации выпуклого множества его площадь увеличивается не более чем в полтора раза, причем ровно в полтора раза может увеличиться только площадь треугольника.*

Доказательство этой теоремы можно прочесть в [40].

2.18 Неравенства для выпуклых фигур с тремя линейными мерами

Следующие точные неравенства справедливы для произвольной выпуклой фигуры M . Большинство из них принадлежит японскому математику Куботе.

Теорема 52 (Кубота). *Справедливы неравенства*

$$2\sqrt{d^2 - b^2} + 2b \arcsin \frac{b}{d} \leq p \leq 2\sqrt{d^2 - b^2} + 2d \arcsin \frac{b}{d},$$

Верхние оценки достигаются только для пересечения круга с диаметром d и полосы ширины b , имеющих общий центр симметрии. Нижние оценки достигаются для центрально-симметричной фигуры, состоящей из круга диаметра b и двух колпаков с вершинами, удаленными от центра круга на расстояние $d/2$, и ограниченными двумя касательными к этому кругу.

Доказательство. Выполним симметризацию Минковского данной фигуры M . Согласно задачам 335, 336, 337 получим центрально-симметричную фигуру M^* той же ширины, того же периметра и того же диаметра. Согласно задаче 25 $b = 2r$, $d = 2R$, поэтому она содержит отрезок длины d с серединой в центре симметрии и круг радиуса $r = b/2$ с центром в нем же. Выпуклая оболочка этой фигуры поэтому содержит в себе фигуру из круга и двух колпаков, описанную в формулировке теоремы. Следовательно ее периметр p (он же периметр исходной фигуры) не меньше периметра фигуры из круга и двух колпаков, и равенство достигается только когда эти фигуры совпадают. Так как площадь исходной фигуры может быть меньше, чем у ее симметризации, то получить таким же способом точную оценку снизу для площади нельзя.

☞ 511. Вычислите его и убедитесь, что таков, как указано в формулировке теоремы.

☞ 512*. Покажите, что экстремальная фигура определена не однозначно, а именно, существует еще одна фигура с данными диаметром и шириной и минимальным периметром, которая не является центрально-симметричной.

Так как ширина фигуры M^* равна $b = 2r$, то эта фигура лежит внутри некоторой полосы ширины b с тем же центром симметрии. В то же время она лежит и внутри круга радиуса $R = d/2$ с центром в нем же. Поэтому она лежит в пересечении этих фигур и имеет периметр и площадь, не большие, чем

у указанного пересечения. Так как при симметризации площадь не уменьшается, то доказанное неравенство для площади остается в силе и для исходной фигуры M . Оно очевидно достигается, когда эта фигура совпадает с указанным пересечением.

☞ 513*. Докажите, что

$$2\sqrt{d^2 - 4r^2} + 4r \arcsin \frac{2r}{d} \leq p \leq 2\sqrt{d^2 - 4r^2} + 2d \arcsin \frac{2r}{d}.$$

Верхние оценки достигаются только для пересечения круга с диаметром d и полосы ширины $2r$, имеющих общий центр симметрии. Нижние оценки достигаются только для центрально-симметричной фигуры, состоящей из круга радиуса r и двух колпачков с вершинами, удаленными от центра круга на расстояние $d/2$, и ограниченными двумя касательными к этому кругу.

Указание. Повторите доказательство теоремы и воспользуйтесь тем, что при симметризации внутренний радиус не убывает, при расширении множества его выпуклая оболочка расширяется, и ее периметр возрастает.

Теорема 53 (Кубота). *Справедливы неравенства*

$$bd/2 \leq s \leq b\sqrt{d^2 - b^2} + d^2 \arcsin \frac{b}{d}.$$

Нижняя оценка достигается только для треугольника с основанием d и шириной b , но только при $\sqrt{3}d \geq 2b$ (при невыполнении этого неравенства указанный треугольник согласно задаче 83 не существует). Верхняя оценка достигается для пересечения круга с диаметром d и полосы ширины b , имеющих общий центр симметрии.

Доказательство. Верхняя оценка получена при доказательстве предыдущей теоремы. Для получения нижней оценки рассмотрим диаметр фигуры и полосу наименьшей ширины, параллельную диаметру и покрывающую фигуру. Возьмем на ее граничных прямых по одной точке. Добавим к ним концы диаметра и рассмотрим образованный этими точками четырехугольник.

Он содержится в фигуре, поэтому ее площадь не меньше, чем его площадь, которая согласно задаче 83 не меньше $bd/2$. Равенство возможно лишь когда фигура совпадает с этим четырехугольником, могущим вырождаться в треугольник, причем его ширина в направлении, перпендикулярном диагонали, являющейся диаметром, равна b . Но если вырождения не происходит, то ширина фигуры меньше b , что невозможно.

Более подробное изложение можно найти в [77] (Кубота там, правда, не упоминается).

❖ 514. Докажите, что

$$r\sqrt{d^2 - 4r^2} + r^2\left(\pi - 2\arccos \frac{2r}{d}\right) \leq s \leq 2r\sqrt{d^2 - 4r^2} + d^2 \arcsin \frac{2r}{d}.$$

Нижняя оценка достигается только для центрально-симметричной фигуры, состоящей из круга радиуса r и двух колпаков с вершинами, удаленными от центра круга на расстояние $d/2$, и ограниченными двумя касательными к этому кругу. Верхняя оценка достигается для пересечения круга с диаметром d и полосы ширины $2r$, имеющих общий центр симметрии.

Указание. Применяя задачу 358, получаем центрально-симметричную фигуру с тем же диаметром и той же площадью, у которой r может только увеличиться. Площадь этой фигуры не меньше, чем площадь круга радиуса r с двумя колпаками.

Теорема 54 (Кубота). *Справедливо неравенство*

$$(p - 2d)\sqrt{p(4d - p)} \leq 4s \leq \frac{\cos \alpha}{2\alpha} p(p - 2d),$$

где α — корень уравнения $p \sin \alpha = 2D\alpha$. Верхнее неравенство достигается лишь для линзы, полученной при пересечении двух равных кругов, у которой их общая хорда равна d , а длина каждой из дуг равна $p/2$. Нижнее неравенство достигается при $p \leq 3d$ только для равнобедренного треугольника с боковой стороной d и периметром p .

Доказательство. Докажем верхнюю оценку. Выполним симметризацию Минковского. При этом p, d не меняются, площадь

не уменьшается. Диаметр делит фигуру пополам. Согласно задаче 381 среди таких фигур максимальную площадь имеет линза, описанная в формулировке теоремы.

☞ 515. Покажите, что вместо симметризации Минковского можно применить симметризацию Штейнера (задача 358). При этом площадь и диаметр не меняются, периметр не увеличивается, диаметр делит фигуру пополам. Верхнее неравенство обращается в равенство только для фигуры, имеющей перпендикулярные оси симметрии, следовательно только для линзы.

Доказательство нижней оценки довольно громоздко. Его можно найти в [77].

Теорема 55 (Кубота). *Справедливо неравенство*

$$4s \leq 2bp - \pi b^2.$$

Равенство достигается для фигуры, составленной из прямоугольника ширины b и длины $(p - \pi b)/2$, приставленных к нему с боков полукругов диаметра b .

Доказательство. Выполним симметризацию Минковского. При этом p, b не меняются, площадь не уменьшается. Фигура лежит в полосе ширины b . Согласно задаче 385 среди таких фигур максимальную площадь имеет прямоугольник с полукругами, описанный в формулировке теоремы.

☞ 516. Покажите, что вместо симметризации Минковского можно применить симметризацию Штейнера относительно оси симметрии наименьшей полосы, содержащей фигуру. При этом ширина и площадь фигуры не меняются, периметр не увеличивается. При этом получается, что равенство возможно только для фигуры, имеющей указанную ось симметрии, следовательно только для прямоугольника с полукругами.

Следующая теорема, предложенная как гипотеза известным французским математиком Фаваром, была доказана японцами Каваи и Яманути.

Теорема 56 (Фавар-Каван-Яманути). *Справедливо неравенство*

$$4s \geq bp - \frac{2}{\sqrt{3}}b^2.$$

При $p \geq 2\sqrt{3}b$ равенство достигается для равнобедренного треугольника периметра p и боковыми высотами b .

Неравенство $s \geq b^2/\sqrt{3}$, которое обращается в равенство только для правильного треугольника, было доказано в теореме 7.

517**. При $p \geq 2\sqrt{3}b$ справедливо неравенство

$$4s \geq bp - \frac{2}{\sqrt{3}}b^2,$$

которое обращается в равенство только для равнобедренного треугольника периметра p и боковыми высотами b .

Доказательство можно найти в [77].

Следующие две теоремы принадлежат датскому математику Боннезену.

Теорема 57 (Боннезен). *Справедливо неравенство*

$$pr/2 \leq s \leq r(p - \pi r).$$

Нижняя оценка достигается только когда многоугольник M описан вокруг круга радиуса r . Равенство в верхней оценке достигается для фигуры, составленной из прямоугольника ширины $2r$ и длины $(p - \pi 2r)/2$, приставленных к нему с боков полукругов радиуса r .

Доказательство. Нижняя оценка для случая многоугольников доказана в задаче 29 вместе со случаем равенства. Для произвольной фигуры она доказывается рассмотрением описанного вокруг фигуры многоугольника и предельным переходом.

В задаче 243 доказано для выпуклых n -угольников следующее неравенство $s \leq pr - fr^2$, в котором $f = \operatorname{ctg} \frac{\alpha_1}{2} + \dots + \operatorname{ctg} \frac{\alpha_n}{2} > \pi$, так как f — полупериметр n -угольника, описанного вокруг

единичного круга. Из этого неравенства следует неравенство теоремы для выпуклых n -угольников. Для произвольной фигуры она доказывается рассмотрением описанного вокруг фигуры многоугольника и предельным переходом.

Теорема 58 (Боннезен). *Справедливо неравенство*

$$R(p - 4R) \leq s \leq \frac{\cos \alpha}{8\alpha} p(p - 4R),$$

где α — корень уравнения $p \sin \alpha = 4R\alpha$. Верхнее неравенство достигается для линзы, полученной при пересечении двух равных кругов, у которой их общая хорда равна $2R$, а длина каждой из дуг равна $p/2$.

О фигурах минимального периметра и заданного диаметра, содержащих данную фигуру

518**. Докажите, что среди всех фигур диаметра d , содержащих прямоугольник размерами $a \times b$, $a \geq b$ наименьший периметр имеет при $d \leq 2(a^2 + b^2)/a$ центрально-симметричный шестиугольник и его периметр равен

$$4 \left(a + \frac{bd}{2\sqrt{b^2 + a^2}} \right),$$

а при $d > 2(a^2 + b^2)/a$ — параллелограмм, и его периметр равен

$$4 \left(a + \sqrt{b^2 + (d/2 - a)^2} \right).$$

519*. Докажите, что для всех фигур диаметра d , содержащих правильный шестиугольник со стороной a наименьшее значение периметра при $d \leq 4a/\sqrt{3}$ равно $4a + d$, при $4a/\sqrt{3} < d \leq 2\sqrt[4]{3}a$ равно

$$4a + 2\sqrt{a^2 + (d - \sqrt{3}a)^2},$$

при $2\sqrt[4]{3}a < d$ равно $2a + \sqrt{3}d$.

520*. Если к эллипсу с фокусами C_1, C_2 проведены из точки A касательные AA_1, AA_2 , то углы $\angle A_1AC_1$ и $\angle A_2AC_2$ равны.

Следующая классическая теорема принадлежит французскому математику 19-го века Шалю.

Теорема 59 (Шаль). Даны два эллипса с общими фокусами и из точки A большего из них проведены касательные к меньшему эллипсу. Докажите, что сумма длин этих касательных минус длина меньшей из дуг эллипса, заключенных между точками касания, не зависит от выбора точки A .

521**. Докажите, что для всех фигур диаметра d , содержащих данный эллипс, наименьший периметр имеет фигура, ограниченная эллипсом и касательными к нему, проведенными из точек, расположенных на большой оси эллипса на расстояниях $d/2$ от его центра.

Неравенства с тремя линейными измерениями для треугольников и четырехугольников

В следующих задачах речь идет о треугольниках, если не оговорено противное. Их измерения обозначены, как обычно: d — диаметр, h — ширина (т.е. минимальная высота), p — полупериметр, R — минимальный радиус накрывающего круга, r — радиус вписанного круга.

522*. Докажите неравенства

$$\frac{d}{2} + \sqrt{\frac{d^2}{4} + h^2} \leq p \leq d + \frac{h}{\sqrt{2 + 2\sqrt{1 - (h/d)^2}}},$$

$$d \left(1 + \sqrt{1 - \frac{d^2}{4R^2}} \right) \leq p \leq \frac{d}{2} + \sqrt{2R^2 + 2R\sqrt{R^2 - \frac{d^2}{4}}},$$

$$p \leq \frac{d^3}{d^2 - 4r^2}.$$

Указание. Применить задачи 47, 48.

523*. Докажите неравенства

$$\frac{d^3}{2R^2} \sqrt{R^2 - \frac{d^2}{4}} \leq S \leq \frac{d}{2} \left(R + \sqrt{R^2 - \frac{d^2}{4}} \right),$$

$$(p-d) \sqrt{p(2d-p)} \leq S \leq \frac{d}{2} \sqrt{p(p-d)},$$

$$rp = S \leq \frac{rd^3}{d^2 - 4r^2}.$$

Указание. Применить задачи 47, 48, 46.

524*. Докажите неравенства

$$\frac{h}{2 + \sqrt{2 - 2\sqrt{1 - \frac{h^2}{d^2}}}} \leq r \leq \frac{h}{1 + 2\sqrt{\frac{1}{4} + \frac{h^2}{d^2}}},$$

$$\frac{d^2 \sqrt{R^2 - \frac{d^2}{4}}}{2 \left(R + \sqrt{R^2 - \frac{d^2}{4}} \right)} \leq r \leq \frac{d \left(\sqrt{R^2 - \frac{d^2}{4}} \right)}{d + 2\sqrt{2R^2 + 2R\sqrt{R^2 - \frac{d^2}{4}}}},$$

$$\frac{p-d}{p} \sqrt{p(2d-p)} \leq r \leq \frac{d}{2p} \sqrt{p(p-d)}.$$

525*. Докажите неравенства

$$\frac{2(p-d)}{d} \sqrt{p(2d-p)} \leq h \leq \sqrt{p(p-d)},$$

$$\frac{d^2}{R^2} \sqrt{R^2 - \frac{d^2}{4}} \leq h \leq R + \sqrt{R^2 - \frac{d^2}{4}},$$

$$h \leq \frac{2rd^2}{d^2 - 4r^2}.$$

Указание. Применить задачу 523.

526*. Докажите, что при $d/2 \leq h \leq \sqrt{3}d/2$

$$\frac{d^2}{8h} + \frac{h}{2} \leq R \leq \frac{d\sqrt{2d^2 - 2d\sqrt{d^2 - h^2}}}{2h},$$

а в общем случае

$$\frac{d}{2} \leq R \leq \max \left(\frac{d^2}{8h} + \frac{h}{2}, \frac{d\sqrt{2d^2 - 2d\sqrt{d^2 - h^2}}}{2h} \right) 2h.$$

Указание. Диаметр равен наибольшей стороне, а h равно опущенной на нее высоте. При фиксированных d, h вершина треугольника лежит на прямой, параллельной его диаметру (основанию), и в то же время она лежит в пересечении двух кругов с центрами в концах диаметра и с радиусами, равными диаметру.

527*. Для четырехугольников диаметра d и периметра p максимальная площадь равна

$$\max \left(\frac{p + 2d}{12\sqrt{3}} \sqrt{p^2 - 4d^2}, \frac{d}{4} \sqrt{p^2 - 4d^2} \right)$$

Указание. Рассмотреть случаи, когда диаметр равен диагонали, и когда он равен стороне.

528*. Среди выпуклых четырехугольников, у которых дана сумма трех сторон, и два угла, образованные ими, максимальную площадь тот, в который вписан полукруг с диаметром на четвертой стороне.

Указание. Зафиксируем среднюю сторону. Две остальные стороны при продолжении образуют угол известной величины. Треугольник, образованный этим углом и четвертой стороной, имеет максимальную площадь тогда и только тогда, когда он равнобедренный, значит четырехугольник с фиксированными одной стороной и суммой двух сторон, смежных с ней, а также с фиксированными углами, образованными этими сторонами друг с другом, имеет максимальную площадь тогда и только тогда, когда углы при его четвертой стороне равны. Отразим этот четырехугольник симметрично относительно этой стороны. Объединив оба этих четырехугольника с общей стороной, получим

выпуклый шестиугольник с известным периметром и известными углами, симметричный относительно одной из своих диагоналей, площадь которого вдвое больше площади данного четырехугольника. Согласно теореме 12, среди таких шестиугольников наибольшую площадь имеет описанный вокруг окружности. В силу симметрии ее центр лежит на диагонали, т.е. на четвертой стороне четырехугольника.

☞ 529. Среди четырехугольников, у которых все стороны, кроме одной, равны a , максимальную площадь имеет половина правильного шестиугольника.

Указание. См. следующую задачу.

☞ 530. Среди n -угольников, у которых все стороны, кроме одной, равны a , максимальную площадь имеет половина правильного $2(n-1)$ -угольника.

Указание. Отразить n -угольник симметрично относительно стороны, не равной a . В объединении с исходным получим (возможно невыпуклый) равносторонний $2(n-1)$ -угольник. Среди таких максимальную площадь имеет правильный.

☞ 531. Среди $2n+1$ -угольников диаметра d и ширины $\sqrt{3}d/2$ найти имеющий минимальный периметр.

2.19 Неравенства для тетраэдра

Тетраэдром называется произвольная треугольная пирамида (не обязательно правильная). Будем пользоваться следующими обозначениями. Объем тетраэдра обозначим V , площади граней — S_i , $i = 1, 2, 3, 4$, площадь поверхности — $S = S_1 + S_2 + S_3 + S_4$. Высоту, опущенную из вершины на грань S_i , обозначим h_i , $i = 1, 2, 3, 4$. Минимальную из высот обозначим h . Длины ребер тетраэдра обозначим a, b, c, a_1, b_1, c_1 (одинаковые буквы соответствуют скрещивающимся ребрам), периметр тетраэдра $P = a + b + c + a_1 + b_1 + c_1$, диаметр тетраэдра $D = \max\{a, b, c, a_1, b_1, c_1\}$, сумма квадратов ребер $\delta = a^2 + b^2 + c^2 + a_1^2 + b_1^2 + c_1^2$. Радиус вписан-

ного шара обозначим r . Радиус наименьшего шара, содержащего тетраэдр, обозначим R .

☞ 532. Докажите, что в любом тетраэдре есть ребро, к которому примыкают только острые плоские углы.

Указание. В качестве этого ребра можно взять диаметр.

☞ 533. Докажите, что $6D \geq P \geq 3D$.

☞ 534. Докажите, что $h_i S_i = 3V$.

☞ 535. Докажите, что $3V = Sr$.

☞ 536. Докажите, что $1/r = 1/h_1 + 1/h_2 + 1/h_3 + 1/h_4$.

Указание. Примените задачи 535, 534.

☞ 537. Докажите, что $2r \geq (h_1^{-2} + h_2^{-2} + h_3^{-2} + h_4^{-2})^{-1/2} \geq h/2$.

Указание. Примените задачи 536, 210.

Бивысотой тетраэдра назовем отрезок, соединяющий скрещивающиеся ребра тетраэдра и перпендикулярный им. Длины бивысот обозначим l_i , $i = 1, 2, 3$. Минимальную из бивысот обозначим l .

☞ 538. Докажите, что бивысоты равны расстояниям между скрещивающимися ребрами тетраэдра.

Бимедианой тетраэдра назовем отрезок, соединяющий середины скрещивающихся ребер тетраэдра. Длины бимедиан обозначим m_i , $i = 1, 2, 3$. Минимальную из бимедиан обозначим m .

☞ 539. Докажите, что бимедианы тетраэдра пересекаются в одной точке, называемой центром тяжести тетраэдра, и делятся в ней пополам.

☞ 540. Верно ли, $h \geq l$? Верно ли, $h \leq l$?

☞ 541. Тетраэдр имеет равные грани тогда и только тогда когда его противоположные ребра равны.

542. Тетраэдр имеет равные грани тогда и только тогда когда его бимедианы являются бивысотами.

Указание. Примените задачу 541.

543. Тетраэдр имеет равные грани тогда и только тогда когда его грани равновелики.

Указание. Примените задачу 542.

544. Тетраэдр имеет равные грани тогда и только тогда когда его высоты равны.

Указание. Примените задачи 543, 534.

545. Докажите, что $r \geq h/4$ и равенство возможно только для равногранного тетраэдра.

Указание. Примените задачи 536, 544.

546. Докажите, что

$$h \leq \frac{1}{\sqrt{(h_1^{-2} + h_2^{-2} + h_3^{-2} + h_4^{-2})/4}} \leq 4r \leq \sqrt[4]{h_1 h_2 h_3 h_4} \leq \\ \leq \frac{h_1 + h_2 + h_3 + h_4}{4} \leq \sqrt{(h_1^2 + h_2^2 + h_3^2 + h_4^2)/4}.$$

Равенства возможны лишь для равногранного тетраэдра.

Указание. Примените задачи 536, 210, 544.

Медианой тетраэдра назовем отрезок, соединяющий вершину тетраэдра с центроидом (точкой пересечения медиан) противоположной грани. Длины медиан обозначим M_i , $i = 1, 2, 3, 4$.

547. Докажите, что медианы тетраэдра пересекаются в одной точке, совпадающей с центроидом (центром тяжести) тетраэдра, и делятся в этой точке в отношении 3 к 1. Докажите, что радиус-вектор центроида тетраэдра равен среднему арифметическому радиус-векторов вершин тетраэдра.

Плоскость, проходящая через ребро тетраэдра и делящая пополам противоположное ребро, называется *медианной плоскостью*.

☉ 548. Докажите, что медианные плоскости тетраэдра делят его объем пополам и пересекаются в его центре.

Указание. Медианная плоскость разбивает тетраэдр на два, имеющие общее основание и равные высоты, и проходит через медианы, проведенные из концов ребра, лежащего на ней.

☉ 549. (Адам) Докажите, что $3r \leq R$. Равенство возможно лишь для правильного тетраэдра.

Указание. Тетраэдр, образованный центроидами его граней, подобен исходному с коэффициентом $1/3$. Описанная вокруг малого тетраэдра сфера имеет радиус $R/3$ и пересекается со всеми гранями большого тетраэдра (или касается их). Поэтому $R/3 \geq r$.

Плоскость, делящая двугранный угол при данном ребре тетраэдра пополам, называется биссектральной плоскостью этого угла.

☉ 550. Докажите, что биссектральные плоскости тетраэдра пересекаются в одной точке, совпадающей с центром вписанного шара.

☉ 551. Докажите, что объем тетраэдра можно выразить через его двугранный угол α при ребре a и площади S_1, S_2 граней, содержащих это ребро по формуле $\frac{2}{3} S_1 S_2 \frac{\sin \alpha}{a}$.

☉ 552. Биссектральная плоскость делит противоположное ребро тетраэдра пропорционально площадям граней, соединяемых этим ребром.

Указание. Рассмотрим два тетраэдра, на которые она делит данный тетраэдр. Согласно задаче 551 отношение их объемов равно отношению площадей граней, между которыми она проведена. Рассматривая эти тетраэдры со стороны общего основания, получаем, что отношение их высот (равное отношению, в котором делится противоположное ребро) равно отношению площадей граней, соединяемых этим ребром.

Отразим медианную плоскость относительно биссектральной плоскости, проходящей через то же ребро. Полученную плоскость назовем симедианной плоскостью.

☛ 553. Докажите, что медианная плоскость делит двугранный угол, образованный гранями с площадями S_1, S_2 , на углы α_1, α_2 , так, что $\sin \alpha_1 / \sin \alpha_2 = S_2 / S_1$.

Указание. Рассмотреть два тетраэдра, на которые она делит данный тетраэдр. Согласно задаче 548 их объемы равны. Согласно задаче 551 поэтому $S_1 \sin \alpha_1 = S_2 \sin \alpha_2$.

☛ 554. Докажите, что симедианная плоскость угла между гранями с площадями S_1, S_2 делит противоположное ребро в отношении S_1^2 / S_2^2 . Эта плоскость есть геометрическое место точек, расстояния от которых до этих граней относятся как S_1 / S_2 .

Указание. Рассмотреть два тетраэдра, на которые она делит данный тетраэдр. Согласно задачам 553, 551 отношение их объемов равно S_1^2 / S_2^2 . У них общее основание, поэтому отношение высот тоже равно S_1^2 / S_2^2 . Значит и противоположное ребро, из концов которого проведены эти высоты, делится симедианной плоскостью в отношении S_1^2 / S_2^2 . Рассмотрим высоты тетраэдров, опущенные на грани S_1, S_2 . Так как объемы тетраэдров относятся как S_1^2 / S_2^2 , то эти высоты относятся как S_1 / S_2 .

☛ 555. Докажите, что симедианные плоскости пересекаются в точке Люиле (см. задачу 270).

Используя специальную терминологию, предыдущую задачу можно сформулировать следующим образом: точка Люиле изогональна центроиду тетраэдра.

☛ 556*. Точка Люиле лежит в плоскости, проходящей через середину бивысот.

☛ 557*. Плоскость, проходящая через бимедиану и середину соответствующей бивысоты проходит также через точку Люиле (т.е. все три такие плоскости проходят через точку Люиле).

Прямую, проходящую через центр описанной вокруг данной грани окружности перпендикулярно грани, назовем *срединным перпендикуляром* к этой грани.

558. Докажите, что срединные перпендикуляры тетраэдра пересекаются в центре описанного вокруг него шара.

559*. (Лейбниц) Докажите, что сумма квадратов расстояний от произвольной точки до вершин тетраэдра принимает минимальное значение в центроиде тетраэдра и это значение равно

$$9(M_1^2 + M_2^2 + M_3^2 + M_4^2)/16 = \delta/4.$$

Указание. Обозначим $r_i, i = 1, \dots, 4$, и r вектора, направленные из центроида тетраэдра в его вершины и данную точку. Сумма квадратов расстояний от нее до вершин тетраэдра равна

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^4 (r_i - r)^2 &= 4r^2 + \sum_{i=1}^4 r_i^2 - 2 \sum_{i=1}^4 (r_i, r) = \\ &= 4r^2 + \sum_{i=1}^4 r_i^2 - 2 \left(\sum_{i=1}^4 r_i, r \right) = 4r^2 + \sum_{i=1}^4 r_i^2 \geq \\ &\geq \sum_{i=1}^4 r_i^2 = \sum_{i=1}^4 (3M_i/4)^2. \end{aligned}$$

Так как

$$\delta = a^2 + b^2 + c^2 + a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 = \sum_{1 \leq i < j \leq 4} (r_i - r_j)^2 =$$

$$3 \sum_{i=1}^4 r_i^2 - 2 \sum_{1 \leq i < j \leq 4} (r_i, r_j),$$

а

$$0 = (r_1 + r_2 + r_3 + r_4)^2 = \sum_{i=1}^4 r_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq 4} (r_i, r_j),$$

то

$$\delta = 4 \sum_{i=1}^4 r_i^2 = \sum_{i=1}^4 9M_i^2/4.$$

☛ 560. Из точки Люиле опущены перпендикуляры на грани тетраэдра. Докажите, что она совпадает с центроидом тетраэдра, образованного основаниями этих перпендикуляров.

Указание. Возьмем любую другую точку «тетраэдра проекций» и опустим из нее перпендикуляры на грани данного тетраэдра. Сумма их квадратов больше суммы квадратов расстояний до граней от точки Люиле (см. задачи 270, 555), а значит, и до вершин тетраэдра проекций, и меньше суммы квадратов расстояний от нее до вершин тетраэдра проекций. Согласно задаче 559 это означает, что точка Люиле совпадает с центроидом тетраэдра проекций.

☛ 561. Докажите, что $4\delta/9 = M_1^2 + M_2^2 + M_3^2 + M_4^2 \leq 64R^2/9$.

Указание. Примените задачу 559.

☛ 562. Докажите, что $M_1 + M_2 + M_3 + M_4 \leq 16R/3$.

Указание. Примените задачи 561 и 210.

☛ 563. Докажите, что равенства в трех предыдущих задачах возможны только для правильного тетраэдра.

Указание. Центроид совпадает с центром описанной сферы только лишь у правильного тетраэдра. Действительно, пусть r_i , $i = 1, \dots, 4$, — равные по длине вектора, направленные из центроида тетраэдра в его вершины. Очевидно, что среди них нет попарно противоположных. Так как их длины равны, а сумма равна нулю, то попарные углы между ними равны, иначе сумма двух из них будет длиннее суммы двух остальных и сумма всех четырех будет отлична от нуля. Возводя скалярно в квадрат равенство $r_1 + r_2 + r_3 + r_4 = 0$, получаем, что косинусы попарных углов между векторами равны $-1/3$, т.е. такие же, как в случае правильного тетраэдра.

☞ 564. Докажите, что

$$4h \leq 16r \leq h_1 + h_2 + h_3 + h_4 \leq M_1 + M_2 + M_3 + M_4 \leq 16R/3$$

$$\begin{aligned} 16h^2 &\leq 64r^2 \leq h_1^2 + h_2^2 + h_3^2 + h_4^2 \leq 4\delta/9 = \\ &= M_1^2 + M_2^2 + M_3^2 + M_4^2 \leq 64R^2/9. \end{aligned}$$

Указание. Примените задачи 561, 562, 546.

☞ 565. Докажите, что неравенства в предыдущей задаче превращаются в равенства только для правильного тетраэдра, за исключением двух первых неравенств в цепочках.

Указание. Если в тетраэдре высоты совпадают с медианами, то он правильный. Действительно, пусть r_i , $i = 1, \dots, 4$, — вектора, направленные из центроида тетраэдра в его вершины. Совпадение высот с медианами означает, что $r_1(r_2 - r_3) = r_1(r_3 - r_4) = 0$, откуда $r_1r_2 = r_1r_3 = r_1r_4$, а так как $r_2 + r_3 + r_4 = -r_1$, то $-r_1^2 = r_1r_2 + r_1r_3 + r_1r_4 = 3r_1r_2$, то $r_1r_2 = -r_1^2/3$, аналогично $r_1r_2 = -r_2^2/3$, значит $|r_1| = |r_2|$, и аналогично получаем, что все r_i равны по длине.

Проведем через каждое ребро тетраэдра плоскость, параллельную противоположному ребру. Построенные шесть плоскостей ограничивают параллелепипед, описанный вокруг тетраэдра.

☞ 566. (Серва) Докажите, что ребра этого параллелепипеда равны бимедианам тетраэдра, высоты равны бивысотам тетраэдра, а объем в три раз больше объема тетраэдра.

☞ 567. У равногранного тетраэдра описанный параллелепипед прямоугольный.

Указание. Примените задачи 566, 542.

☞ 568. (Штейнер) Передвинем ребро тетраэдра параллельно самому себе так, чтобы его перпендикулярная проекция на параллельную ему грань параллелепипеда делилась пополам противоположным ребром тетраэдра. Докажите, что при этом объем тетраэдра не меняется, а площадь поверхности уменьшится.

Указание. При этой операции площади двух граней не меняются, а сумма площадей остальных граней уменьшается в силу неравенства

$$\sqrt{a^2 + x^2} + \sqrt{a^2 + y^2} > 2\sqrt{a^2 + ((x+y)/2)^2}.$$

☞ 569. Не изменяя объема тетраэдра и уменьшая его поверхность, можно получить тетраэдр, у которого бивысота является бимедианой, т.е. в описанном вокруг него параллелепипеде одно из ребер перпендикулярно его грани.

Указание. Применить два раза операцию предыдущей задачи.

☞ 570. Не изменяя объема тетраэдра и уменьшая его поверхность, можно получить тетраэдр, у которого все бивысоты является бимедианами, т.е. описанный вокруг него параллелепипед будет перпендикулярным.

Указание. Применить два раза предыдущую задачу.

☞ 571. Докажите, что для тетраэдра из предыдущей задачи

$$V = l_1 l_2 l_3 / 3, S \geq 2\sqrt{l_1^2 l_2^2 + l_2^2 l_3^2 + l_1^2 l_3^2}.$$

Указание. Проверить, что все грани тетраэдра равны. Найти его ребра по теореме Пифагора. Площадь грани найти по формуле Герона.

☞ 572*. Обозначим S_i вектора, поставленные на грани тетраэдра перпендикулярно им, и направленные вне его, и имеющие длины, равные площадям соответствующих граней. Докажите, что сумма этих векторов равна нулю.

Указание. Проверить, что проекция суммы всех векторов на любой из них равна нулю. Для этого применить формулы для площади проекции плоской фигуры.

Задача 572 имеет обобщение для произвольного выпуклого многогранника и следующее «физическое» решение. Заполним многогранник идеальным газом. Сила давления газа на грани

пропорциональна их площадям и перпендикулярна граням. Сумма сил должна равняться нулю, иначе многогранник полетит.

☞ 573*. Докажите, что длина вектора $S_i + S_j$ равна $3V/h_{i,j}$, где V — объем тетраэдра, а $h_{i,j}$ — бивысота, опущенная из ребра тетраэдра, являющегося пересечением граней S_i, S_j , на скрещивающееся ребро.

Указание. Вектор $S_i + S_j$ параллелен бивысоте $h_{i,j}$. Провести плоскость через пересечение граней S_i, S_j и бивысоту $h_{i,j}$. Она разбивает тетраэдр на два. Вычислить их объемы, умножая площади граней S_i, S_j на треть соответствующей высоты. Длину высоты вычислить, умножив $h_{i,j}$ на косинус угла между $h_{i,j}$ и вектором S_i (соответственно S_j .) Объемы тетраэдров сложить и воспользоваться тем, что проекция вектора $S_i + S_j$ на бивысоту $h_{i,j}$ равна его длине.

☞ 574. Докажите для произвольного тетраэдра неравенство $P \leq \sqrt{6\delta}$, которое обращается в равенство только для правильного тетраэдра.

Указание: примените задачу 210.

☞ 575*. Найдите тетраэдр а) наименьшего объема б) наименьшей поверхности в) наименьшего периметра (суммы ребер), у которого наименьшая из высот равна h .

☞ 576. (Польша, 1978) Докажите, что для любого тетраэдра

$$h_1^{-2} + h_2^{-2} + h_3^{-2} + h_4^{-2} = l_1^{-2} + l_2^{-2} + l_3^{-2}.$$

Указание. См. указание к задаче 577.

☞ 577. Докажите, что $l \leq ((l_1^{-2} + l_2^{-2} + l_3^{-2})/3)^{-1/2} \leq 2\sqrt{3}r$. Равенства возможны лишь для правильного тетраэдра.

Указание. Возводя $S_i + S_j$ скалярно в квадрат, и применяя задачу 573, имеем

$$S_i^2 + S_j^2 + 2(S_i, S_j) = |S_i + S_j|^2 = \frac{(3V)^2}{h_{i,j}^2}.$$

Суммируя эти неравенства по всем парам $i < j$, получаем, что

$$3 \sum_{i=1}^4 S_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq 4} (S_i, S_j) = \sum_{1 \leq i < j \leq 4} \frac{(3V)^2}{h_{i,j}^2} = 2 \sum_{i=1}^3 \frac{(3V)^2}{l_i^2}.$$

Так как сумма векторов S_i равна нулю, то возводя ее скалярно в квадрат, имеем

$$\sum_{i=1}^4 S_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq 4} (S_i, S_j) = 0,$$

поэтому из предыдущего равенства следует, что

$$\sum_{i=1}^4 S_i^2 = \sum_{i=1}^3 \frac{(3V)^2}{l_i^2}.$$

Применяя задачу 534, имеем

$$\sum_{i=1}^4 \frac{(3V)^2}{h_i^2} = \sum_{i=1}^3 \frac{(3V)^2}{l_i^2},$$

откуда

$$\sum_{i=1}^4 h_i^{-2} = \sum_{i=1}^3 l_i^{-2}.$$

Из задачи 537 следует, что $2r \geq (l_1^{-2} + l_2^{-2} + l_3^{-2})^{-1/2}$ откуда

$$l \leq ((l_1^{-2} + l_2^{-2} + l_3^{-2})/3)^{-1/2} \leq 2\sqrt{3}r$$

Равенство возможно лишь когда все S_i равны, т.е. тетраэдр равногранный, и когда все бивысоты равны, т.е. он вписан в куб.

578*. Среди всех тетраэдров с данными основанием и опущенной на него высотой минимальную поверхность имеет тот, в котором эта высота опускается в центр круга, вписанного в основание. Докажите, что в этом тетраэдре высоты боковых граней, опущенные на стороны, лежащие на основании, равны.

Указание. Пусть стороны основания равны a, b, c , высота равна h и опускается в точку, удаленную от сторон основания на расстояния d_a, d_b, d_c . Из теоремы о трех перпендикулярах, теоремы Пифагора и формулы для площади треугольника следует, что удвоенная боковая поверхность тетраэдра равна

$$S = a\sqrt{h^2 + d_a^2} + b\sqrt{h^2 + d_b^2} + c\sqrt{h^2 + d_c^2},$$

а удвоенная площадь основания равна $s = ad_a + bd_b + cd_c$. (последняя формула справедлива всегда, но если высота не попадает на основание, то некоторые из чисел d_a, d_b, d_c отрицательны). Полагая $a + b + c = p$, $\alpha = a/p, \beta = b/p, \gamma = c/p$, имеем $\alpha, \beta, \gamma > 0$, $\alpha + \beta + \gamma = 1$, и радиус вписанного в основание круга равен $r = s/p = \alpha d_a + \beta d_b + \gamma d_c$. Тогда задача сводится к доказательству равенства

$$\begin{aligned} & \min_{\alpha d_a + \beta d_b + \gamma d_c = r} \frac{S}{p} = \\ &= \min_{\alpha d_a + \beta d_b + \gamma d_c = r} \alpha\sqrt{h^2 + d_a^2} + \beta\sqrt{h^2 + d_b^2} + \gamma\sqrt{h^2 + d_c^2} = \sqrt{h^2 + r^2}. \end{aligned}$$

Для его доказательства рассмотрим вектора $v_a = (h, d_a)$, $v_b = (h, d_b)$, $v_c = (h, d_c)$ и заметим, что $\alpha v_a + \beta v_b + \gamma v_c = (h, r)$, поэтому из неравенства треугольника имеем

$$\begin{aligned} \alpha\sqrt{h^2 + d_a^2} + \beta\sqrt{h^2 + d_b^2} + \gamma\sqrt{h^2 + d_c^2} &= \alpha|v_a| + \beta|v_b| + \gamma|v_c| \geq \\ &|\alpha v_a + \beta v_b + \gamma v_c| = \sqrt{h^2 + r^2}. \end{aligned}$$

Решение с помощью принципа Лагранжа можно найти в [65].

☞ **579.** Тетраэдр является правильным тогда и только тогда, когда каждая высота в нем опускается в центр вписанного в противоположную грань круга.

☞ **580*.** Докажите, что неравенство $S \geq 3^{7/6} 2V^{2/3}$ обращается в равенство только для правильного тетраэдра. Докажите, что среди всех тетраэдров данного объема минимальную поверхность имеет только правильный.

Указание. Применить задачу 571 и неравенство задачи 89. Можно также применить задачи 578 и 579.

581. Докажите, что неравенство $r \leq 3^{-1/6} 2^{-1} V^{1/3}$ обращается в равенство только для правильного тетраэдра. Докажите, что среди всех тетраэдров описанных вокруг данного шара минимальную поверхность и минимальный объем имеет только правильный.

Указание. Применить задачу 580 и задачу 535.

582*. Докажите для произвольного тетраэдра неравенства

$$V \geq \frac{\sqrt{3}}{8} h^3, \quad S \geq \frac{3\sqrt{3}}{2} h^2,$$

которые обращаются в равенства только для правильного тетраэдра.

Указание. Применим задачу 578 к одной грани тетраэдра, которую назовем основанием. Тогда можно считать, что все двугранные углы при этой грани равны, и обозначить их величину через ϕ . Пусть H — высота, опущенная на основание и H_a, H_b, H_c — высоты, опущенные из вершин основания на противоположные грани, h_a, h_b, h_c — высоты самого этого основания. Применяя теорему о трех перпендикулярах, имеем

$$h_a \sin \phi = H_a, h_b \sin \phi = H_b, h_c \sin \phi = H_c, \sin \phi = \frac{H}{\sqrt{H^2 + r^2}}.$$

Так как $\min\{h_a, h_b, h_c\} \geq h/\sin \phi$, то площадь и полупериметр основания удовлетворяют неравенствам задач 84, 83

$$s \geq \frac{h^2(H^2 + r^2)}{\sqrt{3}H^2}, \quad p \geq \frac{h\sqrt{3(H^2 + r^2)}}{H},$$

откуда для объема и площади поверхности тетраэдра имеем неравенства

$$V = sH/3 \geq \frac{h^2(H^2 + r^2)}{3\sqrt{3}H},$$

$$S = s + p\sqrt{r^2 + H^2} \geq \frac{h^2(H^2 + r^2)}{\sqrt{3}H^2} + \frac{\sqrt{3}h(H^2 + r^2)}{H}.$$

Из неравенства задачи 78 следует, что

$$r \geq \frac{\min\{h_a, h_b, h_c\}}{3} \geq \frac{h}{3 \sin \phi} = \frac{h\sqrt{r^2 + H^2}}{3H},$$

а значит, $r^2 \geq (hH)^2/(9H^2 - h^2)$, откуда имеем

$$\frac{3\sqrt{3}V}{h^2} \geq \frac{H^2 + r^2}{H} \geq \frac{9H^3}{9H^2 - h^2},$$

$$\frac{\sqrt{3}S}{h} - h \geq \frac{hr^2}{H^2} + \frac{3(H^2 + r^2)}{H} \geq 3H + \frac{h^2(h + 3H)}{9H^2 - h^2} = \frac{27H^3 + h^3}{9H^2 - h^2}.$$

Так как $H \geq h$, и при фиксированном h правые части этих неравенств возрастают с ростом H (это можно проверить дифференцированием), то полагая $H = h$, имеем

$$\frac{3\sqrt{3}V}{h^2} \geq \frac{9h}{8}, \quad \frac{\sqrt{3}S}{h} - h \geq \frac{7h}{2},$$

откуда и следуют неравенства задачи. Равенства возможны лишь при $h = H$, $r^2 = h^2/8$, $\sin \phi = 2\sqrt{2}/3$, т.е. только для правильного тетраэдра.

Другое решение можно получить, используя задачи 581, 545.

583*. Докажите для произвольного тетраэдра неравенство

$$P^2 \geq 12\sqrt{3}S$$

которое обращается в равенства только для правильного тетраэдра.

Указание. Согласно теореме 1 для площади треугольника справедливо неравенство

$$4\sqrt{3}s \leq 2(ab + ac + bc) - a^2 - b^2 - c^2.$$

Применяя эти неравенства к каждой грани тетраэдра и складывая их почленно, имеем

$$ab + ac + bc + a_1b_1 + a_1c_1 + b_1c_1 + a(b_1 + c_1) + b(a_1 + c_1) + c(b_1 + a_1) -$$

$$-a^2 - b^2 - c^2 - a_1^2 - b_1^2 - c_1^2 \geq 2\sqrt{3}S.$$

Остается поверить тождество $P^2 =$

$$\begin{aligned} &= 6(ab+ac+bc+a_1b_1+a_1c_1+b_1c_1+a(b_1+c_1)+b(a_1+c_1)+c(b_1+a_1))- \\ &- 6(a^2+b^2+c^2+a_1^2+b_1^2+c_1^2)+3((a-a_1)^2+(b-b_1)^2+(c-c_1)^2)+ \\ &+ 2((a+a_1-b-b_1)^2+(a+a_1-c-c_1)^2+(c+c_1-b-b_1)^2). \end{aligned}$$

Равенство возможно, лишь когда все ребра тетраэдра равны.

584*. Докажите для произвольного тетраэдра неравенство

$$S \leq \sqrt{3}\delta/6,$$

которое обращается в равенства только для правильного тетраэдра.

Указание. Примените к каждой грани неравенство задачи 484.

$$S \leq \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4\sqrt{3}}$$

и сложите их почленно. Равенство возможно, лишь когда все ребра тетраэдра равны.

585. Докажите, что для любой внутренней точки тетраэдра сумма косинусов углов, под которыми из нее видны его ребра, не меньше -2 , косинус одного из этих углов не больше $-1/3$, а другого не меньше $-1/3$.

Указание. Пусть e_1, e_2, e_3, e_4 — единичные вектора, направленные из данной точки в вершины тетраэдра. Возводя сумму этих векторов скалярно в квадрат, имеем

$$0 \leq \sum_{i=1}^4 e_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq 4} (e_i, e_j) = 4 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq 4} \cos \alpha_{ij}.$$

Отсюда следует, что сумма косинусов углов α_{ij} не меньше -2 , а значит один из них не меньше $-1/3$. Из задачи 435 вытекает, что один из них этих косинусов, не больше $-1/3$.

586. (Москва, 1982) Докажите, что если из внутренней точки правильного тетраэдра все его стороны видны под равными углами, то эта точка — его центр. Докажите такое же утверждение для куба.

587. Докажите, что центр наименьшего шара, содержащего данный тетраэдр, лежит внутри этого тетраэдра.

588. Докажите неравенство

$$\sqrt{\delta} \leq 4R \leq \sqrt{6}D,$$

которое для правильного тетраэдра обращается в равенство.

Указание. Применить задачи 585, 564, 587. Пусть ребро тетраэдра видно из центра объемлющей сферы радиуса R под углом α , $\cos \alpha \leq -1/3$. По теореме косинусов квадрат длины этого ребра не меньше $2R^2 + 2R^2/3 = 8R^2/3$. Но длина этого ребра не больше D .

Теорема 60. Для произвольного тетраэдра справедливы неравенства

$$r \leq \frac{\sqrt[3]{V}}{2\sqrt{3}} \leq \frac{\sqrt{S}}{\sqrt{8}\sqrt[4]{27}} \leq \frac{P}{12\sqrt{6}} \leq \frac{\sqrt{\delta}}{12} \leq \frac{R}{3} \leq \frac{D}{2\sqrt{6}},$$

каждое из которых превращается в равенство только для правильного тетраэдра.

Доказательство следует из утверждений задач 588, 584, 583, 581, 580.

2.20 Неравенства для параллелепипеда

Пусть v — объем произвольного параллелепипеда, s — среднее арифметическое площадей его граней (площадь поверхности, деленная на 6) f — среднее геометрическое площадей его граней, g — среднее геометрическое длин его ребер, e — среднее арифметическое длин ребер, H — среднее геометрическое его высот.

589. Докажите, что объем параллелепипеда не меньше произведения его высот. Равенство справедливо только для прямоугольного параллелепипеда.

Указание. Пусть h_i — высоты, опущенные на грани S_i с площадями s_i . Так как $v = h_1 s_1$, то достаточно доказать, что $s_1 \geq h_2 h_3$. Обозначим h'_2, h'_3 высоты параллелограмма S_1 (если h_2 — это высота, опущенная из вершины грани S_1 на грань S_2 , то высота параллелограмма S_1 , опущенная из той же вершины обозначается h'_2). Тогда $h'_i \geq h_i$, поэтому согласно задаче 159 $s_1 \geq h'_2 h'_3 \geq h_2 h_3$.

590. Докажите, что объем параллелепипеда не меньше квадратного корня из произведения площадей всех трех его различных граней. Равенство справедливо только для прямоугольного параллелепипеда.

Указание. Так как $s_i = v/h_i$, то

$$\sqrt{s_1 s_2 s_3} = \frac{v\sqrt{v}}{\sqrt{h_1 h_2 h_3}}.$$

Остается применить задачу 566.

591. Докажите, что произведение площадей трех различных граней параллелепипеда не превосходит произведения длин шести его ребер. Равенство справедливо только для прямоугольного параллелепипеда.

Указание. Если длины ребер параллелепипеда равны a_1, a_2, a_3 , то достаточно перемножить неравенства

$$s_1 \leq a_2 a_3, \quad s_2 \leq a_1 a_3, \quad s_3 \leq a_1 a_2.$$

Теорема 61 (Ньютон-Маклорен-Сасс). Для произвольного параллелепипеда справедливы неравенства

$$H \leq \sqrt[3]{v} \leq \sqrt{f} \leq \sqrt{s} \leq e, \quad \sqrt{f} \leq g \leq e.$$

Равенства справедливы только для прямоугольного параллелепипеда. Равенства $\sqrt[3]{v} = \sqrt{f}$, $\sqrt[3]{v} = \sqrt{s}$, $\sqrt[3]{v} = e$ справедливы

только для куба. Для прямоугольного параллелепипеда справедливо также неравенство $g \leq \sqrt{s} \leq e \leq D/\sqrt{3}$. В равенство оно обращается только для куба.

Доказательство.

Из неравенств задач 590, 591, 210 следует цепочка неравенств $\sqrt[3]{v} \leq \sqrt{f} \leq g \leq e$.

Эту цепочку неравенств можно обобщить на случай n -мерных параллелепипедов (и соответственно удлинить), и, как показано в [80], применить к доказательству неравенства Сасса для определителей n -го порядка (см. [7]).

Неравенство $f \leq s$ следует из неравенства о среднем арифметическом и среднем геометрическом. Неравенство $\sqrt{s} \leq e$ получается сложением неравенств

$$s_1 \leq a_2 a_3, \quad s_2 \leq a_1 a_3, \quad s_3 \leq a_1 a_2$$

и применением последнего неравенства задачи 86.

Неравенство $e \leq D/\sqrt{3}$ получается применением неравенства задачи 87, если заметить, что диаметр прямоугольного параллелепипеда равен его главной диагонали $D = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$.

Цепочка неравенств $\sqrt[3]{v} \leq \sqrt{s} \leq e \leq D/\sqrt{3}$ является геометрической интерпретацией теоремы 2. Ее тоже можно обобщить на n -мерные параллелепипеды (и соответственно удлинить).

Опять тетраэдр

☞ 592*. (Москва, 1985) Докажите для произвольного тетраэдра неравенства

$$\frac{l^3}{3} \leq \frac{l_1 l_2 l_3}{3} \leq V \leq \frac{m_1 m_2 m_3}{3}$$

и найти условия их обращения в равенства.

Указание. Применить задачу 566 и теорему 61.

☞ 593. Найдите тетраэдр а) наименьшего объема б) наименьшей поверхности в) наименьшего периметра (суммы ребер), который

можно выпилить из доски толщины b , а из доски меньшей толщины выпилить нельзя.

Указание. На первый взгляд кажется, что ширина b тетраэдра равна h — его минимальной высоте. Но на самом деле она равна $\min\{l, h\}$ — минимуму из высот и бивысот тетраэдра. Для правильного тетраэдра $\min\{l, h\} = l$. Далее примените задачи 592 и 583. Экстремальные тетраэдры будут правильными.

То, что мы называем шириной тетраэдра, является частным случаем более общего понятия — колмогоровского поперечника, которое можно определить для компактных множеств даже в бесконечно-мерных пространствах. Нульмерный колмогоровский поперечник тетраэдра равен R — радиусу минимального шара, содержащего этот тетраэдр. Удвоенный двумерный колмогоровский поперечник совпадает с шириной b данного тетраэдра. Вычисление одномерного поперечника даже для правильного тетраэдра — очень трудная задача. Она равносильна выпиливанию данного тетраэдра из прямого кругового цилиндра наименьшего радиуса. Все колмогоровские поперечники правильного n -мерного тетраэдра были вычислены С.В.Пуховым [58].

Ясно, что все указанные выше экстремальные свойства правильного тетраэдра можно сформулировать в терминах его колмогоровских поперечников.

Справедлива также следующая теорема, которую мы оставляем без доказательства.

Теорема 62 (Лагранж—Серре). *Среди всех тетраэдров с данными площадями граней наибольший объем имеет ортоцентрический тетраэдр (у которого все высоты пересекаются в одной точке).*

Доказательство можно найти в [44], задача 26, стр. 32-35.

Читателю, пытающемуся самостоятельно доказать эту теорему, полезно использовать следующую задачу, а также задачи 572, 580.

☛ **594.** Из четырех векторов, построенных по данному тетраэдру $ABCD$ в задаче 572 можно составить 6 пространственных

четыреугольников, выпуклые обложки которых являются тетраэдрами. Доказать, что их объемы равны и однозначно определяются по объему данного тетраэдра. Если противоположные двугранные углы любого из построенных тетраэдров прямые, то тетраэдр $ABCD$ ортоцентрический. Произвольный тетраэдр ортоцентрический тогда и только тогда, когда его скрещивающиеся ребра перпендикулярны. Тетраэдр ортоцентрический тогда и только тогда, когда его высоты опускаются в ортоцентры граней (точки пересечения их высот).

2.21 Некоторые теоремы о выпуклых многогранниках и телах

Здесь приведены, в основном без решений и указаний, некоторые стереометрические обобщения и аналоги планиметрических теорем и задач их предыдущих разделов.

Основные определения понятий выпуклого тела, выпуклого многогранника, опорной плоскости, диаметра, ширины и т.п. вводятся по аналогии с соответствующими «плоскими» понятиями.

Следующая теорема иногда позволяет из утверждений, доказанных для многогранников, выводить утверждения для произвольных ограниченных выпуклых тел.

Теорема 63 (Минковского о приближении). *Произвольное ограниченное выпуклое тело можно заключить между сколь угодно тесно расположенными подобными выпуклыми многогранниками (т.е. для любого выпуклого тела K и любого ϵ , $0 < \epsilon < 1$, можно найти содержащий K выпуклый многогранник V , такой, что подобный ему с коэффициентом $1-\epsilon$ будет содержаться в K).*

С помощью этой теоремы понятие объема произвольного ограниченного выпуклого тела можно определить как предел последовательности объемов приближающих его многогранников. Такое представление об объеме произвольного выпуклого тела достаточно для понимания всех следующих теорем, но все же

предупредим не знающего об это читателя, что строгое построение теории объемов (и поверхностей) совсем не просто (непросто даже строго определить понятие объема выпуклого многогранника) и отослать интересующегося этими вопросами читателя, например, к книге [70].

Теорема 64 (Юнг). *Для произвольного (не обязательно выпуклого) многогранника M (и вообще для любого замкнутого ограниченного пространственного тела) $R(M) \leq \sqrt{3/8}d(M)$. Неравенство обращается в равенство лишь когда в тело M можно вписать правильный тетраэдр того же диаметра, описанный во объемлющую сферу тела M .*

Доказательство. Уменьшая радиус объемлющей сферы, можно добиться ее касания множества M в четырех точках. Если эта сфера минимальная для множества M , то она будет минимальной и для вписанного в нее тетраэдра, и поэтому ее центр будет лежать внутри его. Остается применить задачу 588.

В n -мерном пространстве множитель Юнга равен $\sqrt{\frac{n}{2n+2}}$.

Теорема 65 (Бляшке—Штейнхаген). *Для выпуклого многогранника M (и вообще для любого замкнутого выпуклого пространственного тела) $b(M) \leq 2\sqrt{3}r(M)$. Неравенство обращается в равенство лишь для правильного тетраэдра.*

Доказательство. Увеличивая радиус сферы, лежащей внутри множества M , можно добиться либо ее касания двух параллельных опорных плоскостей этого множества, либо ее касания четырех опорных плоскостей этого множества, образующих содержащий его тетраэдр, описанный вокруг этой сферы. В первом случае расстояние между этими плоскостями равно $2r(M)$, откуда

$$b(M) \leq 2r(M) < 2\sqrt{3}r(M).$$

Во втором случае заметим, что ширина множества M не больше ширины объемлющего тетраэдра, а последняя не больше его минимальной бивысоты l . Применяя задачу 577, имеем

$$b(M) \leq l \leq 2\sqrt{3}r(M).$$

В 1921 немецкий математик Штейнхаген перенес теорему Бляшке в n -мерное пространство. Множитель Бляшке оказался равен $(2n+2)/\sqrt{n+2}$ при четном n и $2\sqrt{n}$ при n нечетном.

Теорема 66 (Бляшке). *В выпуклое тело единичного объема можно вписать тетраэдр объема*

$$\frac{2}{3\sqrt{3}\pi}.$$

В шар единичного объема тетраэдр большего объема вписать нельзя.

Эта теорема также имеет обобщение на n -мерное пространство.

Следующая теорема доказана польскими математиками.

Теорема 67 (Белецки—Радзишевски). *В выпуклое тело единичного объема можно поместить параллелепипед объема $2/9$.*

Для аналогичной задачи в n -мерном пространстве Хадвигер получил оценку n^{-n} .

Теорема 68 (Ауэрабах). *Центрально-симметричное выпуклое тело можно заключить между параллелепипедом и октаэдром, образованным центрами его граней. В центрально-симметричное выпуклое тело единичного объема можно вписать центрально-симметричный октаэдр объема не меньше $1/6$. Вокруг центрально-симметричного выпуклого тела единичного объема можно описать параллелепипед объема не больше 6.*

Указание. Среди всех октаэдров, вписанных в данное тело так, что их центры симметрии совпадают, выберем октаэдр наибольшего объема. Рассмотрим параллелепипед, у которого центры граней совпадают с вершинами октаэдра. Этот параллелепипед содержит данное тело, так как иначе объем выбранного октаэдра можно было бы увеличить. Отношение объемов параллелепипеда и октаэдра равно 6.

Теорема 69 (Хадвигер). *Выпуклое тело единичного объема можно поместить в прямоугольный параллелепипед объема 6.*

Указание. Спроектируем тело на плоскость и полученную выпуклую фигуру накроем прямоугольником вдвое большей площади (см. задачу 462). Рассмотрим прямоугольный параллелепипед, проектирующийся в этот прямоугольник, и содержащий данное тело. Можно считать, что его грани, параллельные данному прямоугольнику, содержат по одной точке данного тела. Рассмотрим выпуклую оболочку множества, состоящего из этих двух точек и рассматриваемой фигуры. Она является объединением двух обобщенных конусов, основанием которых служит эта фигура, а вершинами — данные точки. Объемы конусов равны $Sh_i/3$, где S — площадь фигуры, а h_i — высоты конусов. Основание параллелепипеда — это прямоугольник площади $2S$, а высота равна $h_1 + h_2$, поэтому его объем равен $2S(h_1 + h_2)$ и в шесть раз больше объема рассматриваемой выпуклой оболочки, а значит не более чем в шесть раз больше объема всего данного тела, которое ее очевидно содержит.

В n -мерном пространстве вместо 6 надо взять $n!$

Теорема 70 (Роджерс-Шеппард). *При симметризации выпуклого многогранника его объем увеличивается не более чем в два с половиной раза, причем ровно в два с половиной раза может увеличиться только объем тетраэдра.*

В n -мерном пространстве коэффициент изменения объема равен $2^n / \binom{2n}{n}$.

Теорема 71 (Грюнбаум). *Выпуклое тело можно заключить между двумя подобными с коэффициентом 3 тетраэдрами. Для центрально-симметричных тел этот коэффициент 3 уменьшить нельзя.*

Указание. Впишем в тело тетраэдр наибольшего объема и через каждую его вершину проведем плоскость, параллельную противоположной грани. Эти плоскости ограничивают тетраэдр, подобный (но не гомотетичный) данному с коэффициентом 3. Меньший тетраэдр при этом образуется центрами граней большего тетраэдра. Больший тетраэдр содержит в себе данное тело

(в противном случае внутри тела содержался бы тетраэдр, одна из граней которого совпадает с гранью малого тетраэдра, но большего объема, что невозможно). Если тело центрально-симметрично, то оно имеет два симметричных друг другу относительно его центра максимальных вписанных тетраэдра. Но оба эти тетраэдра нельзя накрыть подобным им тетраэдром с коэффициентом подобия меньше 3.

Теорема 72 (Штейнер-Шварц). *Среди всех тел с данным объемом наибольшую поверхность имеет шар. Среди всех тел с данным объемом наименьшую поверхность имеет шар.*

Эта теорема также переносится на n -мерное пространство. Однако определение понятий объема и площади поверхности не элементарно даже в трехмерном случае.

Теорема 73 (Биберах). *Среди всех тел с данным диаметром наибольший объем и наибольшую поверхность имеет шар. Среди всех тел с данным объемом или данной поверхностью наименьший диаметр имеет шар.*

Эта теорема без изменений переносится на n -мерное пространство.

Указание. Применить симметризацию Минковского.

Теорема 74 (Брунн—Минковский). *Если тела A и B выпуклы и имеют объемы v_A, v_B , а множество $\alpha A + (1 - \alpha)B$ имеет объем v , то $\sqrt[3]{v} \geq \alpha \sqrt[3]{v_A} + (1 - \alpha) \sqrt[3]{v_B}$. Равенство возможно лишь когда фигуры гомотетичны.*

Эта теорема переносится на n -мерное пространство с заменой 3 на n .

Формула Штейнера обобщается на пространственный случай следующим образом. Объем ϵ -окрестности выпуклого многогранника равен

$$V + S\epsilon + M\epsilon^2 + \frac{4\pi}{3}\epsilon^3,$$

где V — его объем, S — площадь поверхности, $M = \frac{1}{2} \sum \alpha l$, где сумма берется по всем его ребрам, l — длина ребра, α — угол при

этом ребре, дополняющий до π двугранный угол многогранника при этом ребре.

Для произвольных выпуклых тел величина M определяется более сложно, и мы здесь не будем ее определять.

Теорема 75 (Минковский). *Для произвольного выпуклого многогранника справедливы неравенства*

$$S^2 \geq 3VM, \quad M^2 \geq 4\pi S.$$

❖ 595. Выведите из этой теоремы теорему 72.

Первое неравенство теоремы 75 уточняется в следующей теореме, доказанной в 1943 г. немецким математиком Г. Болем.

Теорема 76 (Г. Боль). *Для произвольного выпуклого многогранника справедливы неравенства*

$$S^2 \geq 3V \sum l \operatorname{tg} \alpha/2.$$

Некоторым аналогом теоремы Люиллье для пространства произвольной размерности является следующая теорема, доказанная подданным Российской империи известным финским математиком Линделефом.

Теорема 77 (Линделеф). *Среди всех выпуклых многогранников данного объема и с данными направлениями граней наименьшую поверхность имеет многогранник, описанный вокруг шара.*

Существование и единственность многогранника с данными площадями и данными направлениями граней утверждает теорема Минковского. А.Д.Александров дал элементарное доказательство более сильного утверждения, но оно слишком сложно, что поместить его здесь.

Следующие теоремы являются обобщениям аналогичных неравенств, доказанных в предыдущих разделах для тетраэдра и параллелепипеда.

Теорема 78 (Фейеш-Тот). Объем выпуклого многогранника с e вершинами, f гранями и k ребрами, содержащего шар радиуса r , не меньше

$$\frac{k}{3} \sin \frac{\pi f}{k} \left(\operatorname{tg} \frac{\pi f}{2k} \operatorname{tg}^2 \frac{\pi e}{2k} - 1 \right) r^3.$$

У многогранник с n гранями объем не меньше

$$(n-2)(3 \operatorname{tg}^2 \omega_n - 1) \sin 2\omega_n,$$

где $\omega_n = \frac{\pi}{6} \frac{n}{n-2}$. У многогранник с n вершинами объем не меньше

$$\frac{\sqrt{3}}{2} (n-2)(3 \operatorname{tg}^2 \omega_n - 1).$$

Все равенства достигаются только для правильных многогранников.

Здесь уместно объяснить (тем кто не знает), что правильным многогранником называется выпуклый многогранник, у которого все грани равные правильные многоугольники и все многогранные углы равные и правильные (т.е. имеют равные двугранные углы между соседними гранями). Кроме правильного тетраэдра и куба, есть еще правильный октаэдр (восьмигранник) — двойственный кубу правильный многогранник, который образован центрами граней куба, и имеет поэтому 6 вершин и 8 треугольных граней (в свою очередь центры граней октаэдра образуют куб), а также додекаэдр (двенадцатигранник), который имеет 12 пятиугольных граней и 20 вершин, и взаимно двойственный ему (в том же смысле, что и куб с октаэдром) икосаэдр с 20-ю треугольными гранями и 12 вершинами. Доказательство существования всех этих многогранников и отсутствия других имеется в последней книге Евклида (как утверждают иногда, Евклид писал монографию о правильных многогранниках, а для того, чтобы явно их построить и проверить все их замечательные свойства, ему пришлось написать и предшествующие этой одиннадцать книг, составивших знаменитые «Начала»).

Выпуклость в определении правильного многогранника важна, потому что в 19 веке французский математик Пуансо нашел 4 невыпуклых (так называемых звездчатых) многогранника, которые удовлетворяют всем остальным условиям определения правильных многогранников, и которые стали называть невыпуклыми правильными многогранниками (или телами Пуансо, а выпуклые правильные многогранники еще с древности называют телами Платона), после того, как выяснилось, что других правильных звездчатых многогранников нет. Впрочем, невыпуклыми телами мы здесь не интересуемся, и сделав это отступление, опять возвращаемся к экстремальным свойствам выпуклых многогранников.

Теорема 79 (Фейеш-Тот, Флориан). *Объем выпуклого многогранника с e вершинами, f гранями и k ребрами, содержащегося в шаре радиуса R , не больше*

$$\frac{2k}{3} \cos^2 \frac{\pi f}{2k} \operatorname{ctg} \frac{\pi e}{2k} \left(1 - \operatorname{ctg}^2 \frac{\pi f}{2k} \operatorname{ctg}^2 \frac{\pi e}{2k} \right) R^3.$$

У многогранник с n вершинами объем не больше

$$\frac{n-2}{6} (3 - \operatorname{ctg}^2 \omega_n) \operatorname{ctg} \omega_n.$$

Для произвольного выпуклого многогранника справедливо неравенство

$$\frac{R}{r} \geq \operatorname{tg} \frac{\pi}{p} \operatorname{tg} \frac{\pi}{q},$$

где $p = 2k/f$ — среднее число сторон одной грани, $q = 2k/e$ — среднее число ребер, выходящих из одной вершины. Для произвольного выпуклого многогранника с n вершинами или с n гранями справедливо неравенство

$$\frac{R}{r} \geq \sqrt{3} \operatorname{tg} \omega_n.$$

Все равенства достигаются только для правильных многогранников.

Теорема 80 (Фейеш-Тот). Для произвольного выпуклого n -гранника справедливо неравенство

$$\frac{S^3}{V^2} \geq 54(n-2)(4\sin^2 \omega_n - 1) \operatorname{tg} \omega_n,$$

причем равенство достигается для куба и правильного додекаэдра.

Из всех правильных многогранников обобщаются на n -мерные пространства (при $n > 4$) только тетраэдр (там его называют правильным n -мерным симплексом), куб и октаэдр. Для произвольного n -мерного симплекса справедливо неравенство

$$\frac{S^n}{V^{n-1}} \geq \frac{n^{3n/2}(n+1)^{(n+1)/2}}{n!},$$

где V — его объем, а S — площадь поверхности. Для n -мерного параллелепипеда справедливо неравенство

$$\frac{S^n}{V^{n-1}} \geq (2n)^n.$$

Доказательства можно найти в [70].

Некоторые задачи Штейнера о поверхностях и объемах

❖ **596.** Из всех призм с одинаковой высотой и общим основанием наименьшую (как боковую, так и полную) поверхность имеет прямая призма.

❖ **597.** Из всех призм с общим основанием и одинаковой поверхностью наибольшую высоту и объем имеет прямая призма.

❖ **598.** Из двух прямых правильных призм, призма имеющая больше боковых граней, имеет:

а) меньшую поверхность при равенстве высот и равновеликости оснований обеих призм;

б) большее основание и больший объем в случае равновеликости боковых поверхностей и равенстве высот;

в) большую высоту и больший объем, если основания и боковые поверхности соответственно равновелики;

г) меньшее основание и большую высоту, если боковые поверхности и объемы соответственно равновелики;

❖ 599. Куб имеет наибольший объем среди всех параллелепипедов с данной поверхностью.

Указание. См. теорему 61.

❖ 600. Куб имеет наименьшую поверхность среди всех параллелепипедов с данным объемом.

Указание. См. теорему 61.

❖ 601. Среди всех n -гранных призм с данной величиной боковой поверхности наибольший объем имеет правильная прямая призма, основание которой составляет шестую часть полной поверхности. Эта призма описана вокруг шара, который касается ее боковых граней в их центрах.

Главным в обстановке гостиной, в которой мы сидели, тем, что так сильно отличало ее от гостиной в нашем доме, было невероятное количество книг. Книги были повсюду. Не только все стены комнаты, коридора и маленькой прихожей были увешаны полками от пола до потолка, но и на полу лежали книги высокими стопками. Апостолос Докснадис, «Дядя Петрос и проблема Гольдбаха», 1992.

Литература

- [1] 400 избранных задач из журнала AMM. М.: URSS, 2008.
- [2] *Абрамов С. А.* Лекции о сложности алгоритмов.— М.: МЦНМО, 2009.
- [3] *Адамар Ж.* Элементарная геометрия ч. 1 (планиметрия), ч. 2 (стереометрия).— М.: Учпедгиз, 1957
- [4] *Александров И. И.* Сборник задач на построение циркулем и линейкой.— М.: Учпедгиз, 1950; 20-е изд. М.: КомКнига/URSS, 2010.
- [5] *Арнольд В. И.* В школьном математическом кружке при МГУ. Математическое просвещение, вторая серия, вып. 2, 1957, 241–245.
- [6] *Акопян А. В., Заславский А. А.* Геометрические свойства кривых второго порядка.— М.: МЦНМО 2007.
- [7] *Беккенбаг Э., Беллман Р.* Неравенства.— 2-е изд. М.: URSS, 2004.
- [8] *Беккенбаг Э., Беллман Р.* Введение в неравенства.— М.: «Мир», 1965.
- [9] *Бляшке В.* Круг и шар.— М.: «Наука», 1967.
- [10] *Болтянский В. Г., Гохберг И. Ц.* Теоремы и задачи комбинаторной геометрии. — М.: «Наука», 1965.
- [11] *Болтянский В. Г., Гохберг И. Ц.* Разбиение фигур на меньшие части. — М.: «Наука», 1971.
- [12] *Боннезен Т., Фенгель В.* Теория выпуклых тел.— М.: «Фазис», 2004.
- [13] *Бринкхаус Я., Протасов В. Ю.* Теория экстремума в простых примерах. Математическое просвещение вып. 9 2005, 32–55, МЦНМО.
- [14] *Бураго Д. М., Залгаллер В. А.* Геометрические неравенства М.: «Наука», 1980.

- [15] *Васильев Н. В., Егоров А. А.* Задачи Всесоюзных математических олимпиад. М.: Наука, 1988.
- [16] *Васильев Н. В.* Статьи из журнала «Квант» Часть 1. Библиотечка Квант, выпуск 125. Изд. МЦНМО 2012. олимпиад. М.: Наука, 1988.
- [17] *Васильев Н. В.* Сложение фигур. — Квант, N 4, 1976.
- [18] *Евклид.* Начала / Предисл., пояснит. введ. и доп. М. Е. Ващенко-Захарченко. 3-е изд. М.: Книжный дом «Либроком»/URSS, 2013.
- [19] Венгерские математические олимпиады.— М.: «Мир», 1976.
- [20] *Гальперин Г. А., Толпыго А. К.* Московские математические олимпиады. — М.: Просвещение, 1986.
- [21] *Гашков С. В.* Неравенства для площади и периметра выпуклого многоугольника. — Квант, N 10, 1985.
- [22] *Гашков С. В.* Неравенства для выпуклых многоугольников и многоугольники Рейнхардта. — Математическое просвещение вып. 11 2007, 91–103, МЦНМО.
- [23] *Гашков С. В.* α -Диаметры и турановские графы Математическое просвещение вып. 12 2008, МЦНМО.
- [24] *Гашков С. В.* Современная элементарная алгебра в задачах и упражнениях. МЦНМО, 2006.
- [25] *Грюнбаум В.* Этюды по комбинаторной геометрии и теории выпуклых тел — М.: Наука, 1971.
- [26] *Данцер Л., Грюнбаум В., Кли В.* Теорема Хелли и ее применения.— М.: «Мир», 1968.
- [27] *Делоне Б. Н., Райков Д. А.* Аналитическая геометрия т. 1 ОГИЗ, 1948.
- [28] *Делоне Б. Н., Житомирский О. К.* Задачник по геометрии. ГИТТЛ, 1950.
- [29] *Делоне Б. Н.* Доказательство неравенства Брунна-Минковского. — Успехи математических наук, вып. II, 1936.
- [30] *Дразович В., Раднович М.* Интегрируемые бильярды, квадрики и многомерные поризмы Понселе.— Москва-Ижевск, изд РХД, 2010.
- [31] Зарубежные математические олимпиады.— М.: «Наука», 1987.

- [32] *Зетель С. И.* Задачи на максимум и минимум.— М.: Гостехиздат, 1948.
- [33] *Извольский Н. А.* О треугольнике минимального периметра, вписанном в остроугольный треугольник. — Математическое просвещение, первая серия, вып. 10 1937, с. 5–10.
- [34] *Коксетер Г. С. М.* Введение в геометрию. М.: Мир, 1966.
- [35] *Коксетер Г. С. М., Грейтцер С. Л.* Новые встречи с геометрией.— М.: Наука, 1978. (и следующие издания).
- [36] *Кострикин А. И.* Основные структуры алгебры.— М.: Физматлит, 2000.
- [37] *Крыжановский Д. А.* Изопериметры.— 5-е изд. М.: URSS, 2010.
- [38] *Курант Д., Роббинс Г.* Что такое математика.— М.: МЦНМО, 2001.
- [39] *Леман А. А.* Московские математические олимпиады.— М.: Просвещение, 1965.
- [40] *Лектвэйс К.* Выпуклые множества.— М.: «Наука», 1985.
- [41] *Литтлвуд Дж.* Математическая смесь.— М.: «Наука», 1980.
- [42] *Люстерник Л. А.* Выпуклые фигуры и многогранники.— М.: ГИТТЛ, 1956.
- [43] *Маршала А., Олкин И.* Неравенства. Теория мажоритации и ее приложения.— М.: «Мир», 1983.
- [44] *Моденов П. С.* Задачи по геометрии. — М.: «Наука», 1979.
- [45] *Морозова Е. А., Петраков И. С., Скворцов В. А.* Международные математические олимпиады.— М.: «Просвещение», 1976.
- [46] *Нестеров Ю. Е.* Введение в выпуклую оптимизацию. МЦНМО 2010.
- [47] Польские математические олимпиады. М.: «Мир», 1978.
- [48] *Понарин Я. П.* Элементарная геометрия т. 1. — Изд. МЦНМО, 2004.
- [49] *Понарин Я. П.* Элементарная геометрия т. 2. — Изд. МЦНМО, 2006.
- [50] *Постников М. М.* Теория Галуа. — Изд. «Факториал», 2003.
- [51] *Прасолов В. В.* Задачи по планиметрии.— М.: «Наука», 1986 (или любое позднее издание).

- [52] *Прасолов В. В., Шарыгин И. Ф.* Задачи по стереометрии.— М.: «Наука», 1989.
- [53] *Прасолов В. В.* Задачи по стереометрии.— МЦНМО, 2010.
- [54] *Прасолов В. В.* Задачи по алгебре.— МЦНМО, 2010.
- [55] *Препарата Ф., Шеймос М.* Вычислительная геометрия: введение. М.: «Мир», 1989.
- [56] *Протасов В. Ю.* Максимумы и минимумы в геометрии.— Изд. МЦНМО, 2005.
- [57] *Протасов В. Ю., Тихомиров В. М.* Пространство L_p и замечательные точки треугольника. Квант N 2, 2012.
- [58] *Пухов С. В.* Колмогоровские поперечники правильного симплекса.— Вестник МГУ Математика, Механика 1980 N 4, 34–37.
- [59] *Радемахер Г., Теплиц О.* Числа и фигуры.— М.: «Наука», 1966; 4-е изд. М.: Издательство ЛКИ/URSS, 2007.
- [60] *Райгородский А. М.* Проблема Борсука. — Изд. МЦНМО, 2006.
- [61] *Сантало Л. А.* Введение в интегральную геометрию. М. ИЛ. 1956.
- [62] *Скопенков А. Б.* n -мерный куб, многочлены и решение проблемы Борсука.— Математическое просвещение вып. 3 1999, 184–188, МЦНМО.
- [63] *Соловьев Ю. П.* Неравенства. — Изд. МЦНМО., 2006.
- [64] *Стенли Р.* Перечислительная комбинаторика.— М.: «Мир», 1990.
- [65] *Тихомиров В. М.* Рассказы о максимумах и минимумах. М. «Наука», 1986.
- [66] *Хонсбергер Р.* Математические изюминки. — М.: Наука, 1992.
- [67] *Табачников С. Л.* Геометрия и бильярды. Москва-Ижевск, изд. РХД, 2011.
- [68] *Табачников С. Л., Фукс Д. В.* Математический дивертисмент. МЦНМО, 2011.
- [69] *Фейеш Тот Л.* Расположения на плоскости, на сфере и в пространстве.— М.: Физматгиз, 1958.

- [70] *Хадевигер Г.* Лекции об объеме, площади поверхности и изопериметрии.— М.: Физматгиз, 1966.
- [71] *Хадевигер Г., Дебруннер Г.* Задачи и теоремы комбинаторной геометрии. М. Наука, 1965.
- [72] *Шарыгин И. Ф.* Задачи по стереометрии.— М.: Наука, 1984.
- [73] *Шклярский Д. О., Ченцов Н. Н., Яглом И. М.* Геометрические оценки и задачи из комбинаторной геометрии. М.—: Наука, 1974.
- [74] *Шклярский Д. О., Ченцов Н. Н., Яглом И. М.* Геометрические неравенства и задачи на максимум и минимум.— М.: Наука, 1970.
- [75] *Шклярский Д. О., Ченцов Н. Н., Яглом И. М.* Избранные задачи и теоремы элементарной математики (арифметика и алгебра). М.—: Наука, 1965.
- [76] *Штейнгауз Г.* Математический калейдоскоп. М.: «Наука», 1981.
- [77] *Яглом И. М., Болтянский В. Г.* Выпуклые фигуры.— М.: ГИТТЛ, 1951.
- [78] *Audet C., Hansen P. and Messine F.* Isoperimetric polygons of maximum width. *Discrete Comput. Geom.* 41 (2009), no 1, p. 45–60.
- [79] *Coppersmith D., Nagy G., Rausky A.* On curves contained in convex subsets on the plane.— arXiv: 1205.0663v1. [math.MG]
- [80] *Gaschkov S. B.* Ein einfacher geometrischer Beweis für die Determinantenungleichung von O.Szasz.— *Elemente der Mathematik*, Basel, v. 45,N 6 (1990) pp. 153–155.
- [81] *Hare K. G., Mossinghoff M. J.* Sporadic Reinhardt polygons. arXiv: 1203.4107v2. [math.MG] 27 sep. 2012
- [82] *Mossinghoff M. J.* Enumerating isodiametric and isoperimetric polygons. *Journal of Combinatorial theory. Series A.* v.118 N 6 p. 1801–1815 (2011).
- [83] *Reinhardt K.* Extremal Polygone gegebenen Durchmessers.— *Jber.Deutsch. Math.-Vereinig.* Bd. 31, 251–270 (1922).

Представляем Вам следующие книги:



Математическая логика

- ✓ Колмогоров А. Н., Драгалин А. Г. Математическая логика: Введение в математическую логику.
- ✓ Колмогоров А. Н., Драгалин А. Г. Математическая логика: Дополнительные главы.
- ✓ Драгалин А. Г. Конструктивная теория доказательств и нестандартный анализ.
- ✓ Фреге Г. Логика и логическая семантика.
- ✓ Гладкий А. В. Введение в современную логику.
- ✓ Гамов Г., Стерн М. Занимательные задачи.
- ✓ Карпенко А. С. Развитие многозначной логики.
- ✓ Карпенко А. С. Логика Лукасевича и простые числа.
- ✓ Карпенко А. С. Фатализм и случайность будущего: Логический анализ.
- ✓ Бахтияров К. И. Логика с точки зрения информатики.

Серия «Физико-математическое наследие: основания математики и логика»

- ✓ Чэрч А. Введение в математическую логику.
- ✓ Гудстейн Р. Л. Математическая логика.
- ✓ Бурбаки Н. Теория множеств.
- ✓ Хаусдорф Ф. Теория множеств.
- ✓ Френкель А. А., Бар-Хиллел И. Основания теории множеств.
- ✓ Лебег А. Об измерении величин.

Серия «Физико-математическое наследие: теория функций»

- ✓ Курант Р. Геометрическая теория функций комплексной переменной.
- ✓ Привалов Н. И. Субгармонические функции.
- ✓ Бор Г. Почти периодические функции.
- ✓ Артин Э. Введение в теорию гамма-функций.
- ✓ Князев П. Н. Интегральные преобразования.

Дискретная математика

- ✓ Харари Ф. Теория графов.
- ✓ Оре О. Графы и их применение.
- ✓ Оре О. Теория графов.
- ✓ Емеличев В. А., Зверович Н. Э., Мельников О. И., Сарванов В. И., Тышкевич Р. И. Теория графов в задачах и упражнениях.
- ✓ Емеличев В. А., Мельников О. И. и др. Лекции по теории графов.
- ✓ Мельников О. И. Теория графов в занимательных задачах: Более 250 задач с подробными решениями.
- ✓ Мельников О. И. Незнания в стране графов: Юным математикам и программистам.
- ✓ Мельников О. И. Обучение дискретной математике.
- ✓ Деза Е. И., Модель Д. Л. Основы дискретной математики.
- ✓ Панюкова Т. А. Комбинаторика и теория графов.
- ✓ Березина Л. Ю. Графы и их применение.
- ✓ Малинин Л. И., Малинина Н. Л. Изоморфизм графов в теоремах и алгоритмах.
- ✓ Родионов В. В. Методы четырехцветной раскраски вершин плоских графов.

Представляем Вам следующие книги:

Серия «НАУКУ — ВСЕМ! Шедевры научно-популярной литературы»



- ✓ Колмогоров А. Н. Математика — наука и профессия.
 - ✓ Жуков А. В. Элегантная математика: Задачи и решения.
 - ✓ Жуков А. В. Прометеева искра: Античные истоки искусства математики.
 - ✓ Гнеденко Б. В. Беседы о теории массового обслуживания.
 - ✓ Гнеденко Б. В. Беседы о математической статистике.
 - ✓ Гнеденко Б. В., Хинчин А. Я. Элементарное введение в теорию вероятностей.
 - ✓ Мизес Р. Вероятность и статистика.
 - ✓ Меникс Ф. Некоторые тайны артистов-вычислителей.
 - ✓ Вильямс Дж. Д. Совершенный стратег, или Букварь по теории стратегических игр.
 - ✓ Юдин Д. Б., Юдин А. Д. Математики измеряют сложность.
-
- ✓ Боровков А. А. Теория вероятностей.
 - ✓ Крэндалл Р., Померанс К. Простые числа: Вычислительные и криптографические аспекты.
 - ✓ Александрова Н. В. Из истории векторного исчисления.
 - ✓ Горбачев Б. С. Теория вероятностей, математическая статистика и элементы случайных процессов: Упрощенный курс.
 - ✓ Пухначев Ю. В., Попов Ю. П. Математика без формул. В 2 кн.
 - ✓ Супрун В. П. Математика для старшеклассников: Задачи повышенной сложности.
 - ✓ Супрун В. П. Математика для старшеклассников: Нестандартные методы решения задач.
 - ✓ Супрун В. П. Математика для старшеклассников: Методы решения и доказательства неравенств. 367 задач с подробными решениями.
 - ✓ Мордухай-Болтовской Д. Д. Геометрия радиальрий.
 - ✓ Золотаревская Д. И. Теория вероятностей. Задачи с решениями.
 - ✓ Федин С. Н. Математики тоже шутят.
 - ✓ Петров Н. Н. Математические игры.
 - ✓ Поля Д. Как решать задачу.
 - ✓ Гнеденко Б. В., Беллев Ю. К., Соловьев А. Д. Математические методы в теории надежности: Основные характеристики надежности и их статистический анализ.

Наши книги можно приобрести в магазинах:

Тел./факс:
+7 (499) 724-23-45
(многоканальный)

E-mail:
URSS@URSS.ru
http://URSS.ru

«НАУКУ — ВСЕМ!» (м. Профсоюзная, Нахимовский пр-т, 56. Тел. (499) 724-2345)
 «Библио-Глобус» (м. Лубянка, ул. Мясницкая, 6. Тел. (495) 625-2457)
 «Московский дом книги» (м. Арбатский, ул. Новый Арбат, 8. Тел. (495) 203-8242)
 «Молодая гвардия» (м. Полянка, ул. Б. Полянка, 28. Тел. (495) 238-5001, (495) 780-3370)
 «Дом научно-технической книги» (Ленинский пр-т, 40. Тел. (495) 137-6019)
 «Дом книги на Ладонской» (м. Бауманская, ул. Ладонская, 8, стр. 1. Тел. (495) 267-0382)
 «Санкт-Петербургский Дом книги» (Невский пр., 28. Тел. (812) 448-2355)
 «Книжный бум» (г. Киев, книжный рынок «Петровка», ряд 62, место 8 (павильон «Академичка»). Тел. +38 (067) 273-5010)
 Сеть магазинов «Дом книги» (г. Екатеринбург, ул. Антона Баева, 12. Тел. (343) 253-5010)

Уважаемые читатели! Уважаемые авторы!

Наше издательство специализируется на выпуске научной и учебной литературы, в том числе монографий, журналов, трудов ученых Российской академии наук, научно-исследовательских институтов и учебных заведений. Мы предлагаем авторам свои услуги на выгодных экономических условиях. При этом мы берем на себя всю работу по подготовке издания — от набора, редактирования и верстки до тиражирования и распространения.



Среди вышедших и готовящихся к изданию книг мы предлагаем Вам следующие:

- ✓ **Гашков С. Б.** Занимательная компьютерная арифметика: Математика и искусство счета на компьютерах и без них.
- ✓ **Гашков С. Б.** Занимательная компьютерная арифметика: Быстрые алгоритмы операций с числами и многочленами.
- ✓ **Краснов М. Л. и др.** Вся высшая математика. Т. 1–7.
- ✓ **Краснов М. Л., Киселев А. Н., Махаренко Г. И.** Сборники задач «Вся высшая математика» с подробными решениями.
- ✓ **Ткачев Н. Г.** Справочник по высшей математике для студентов вузов.
- ✓ **Боларчук А. К., Ляшко Н. Н., Гай Я. Г., Голосач Г. П.** Справочное пособие по высшей математике (Антидифференциал). Т. 1–5.
 - Т. 1. Введение в анализ, производная, интеграл.
 - Т. 2. Ряды, функции векторного аргумента.
 - Т. 3. Интегралы, зависящие от параметра; кратные и криволинейные интегралы.
 - Т. 4. Функции комплексного переменного: теория и практика.
 - Т. 5. Дифференциальные уравнения в примерах и задачах.
- ✓ **Босс В.** Лекции по теории управления. Т. 1: Автоматическое регулирование.
- ✓ **Босс В.** Интуиция и математика.
- ✓ **Босс В.** Лекции по математике. Т. 1–16. Т. 1: Анализ; Т. 2: Дифференциальные уравнения; Т. 3: Линейная алгебра; Т. 4: Вероятность, информация, статистика; Т. 5: Функциональный анализ; Т. 6: От Диофанта до Тьюринга; Т. 7: Оптимизация; Т. 8: Теория групп; Т. 9: ТФКП; Т. 10. Перебор и эффективные алгоритмы; Т. 11. Уравнения математической физики; Т. 12. Контрпримеры и парадоксы; Т. 13. Топология; Т. 14. Теория чисел; Т. 15. Нелинейные операторы и неподвижные точки; Т. 16. Теория множеств: От Кантора до Коэна.
- ✓ **Ищенко Г. И., Медведев Ю. И.** Введение в математическую статистику. Статистика знает все.
- ✓ **Пантеев М. Ю.** Матанализ с человеческим лицом, или Как выжить после предельного перехода: Полный курс математического анализа. В 2 т.
- ✓ **Зуев Ю. А.** По оклаву дискретной математики: От перечислительной комбинаторики до современной криптографии. В 2 т.
- ✓ **Moscow Journal of Combinatorics and Number Theory.** (One volume of four issues is published annually.)

По всем вопросам Вы можете обратиться к нам:
тел. +7 (499) 724-25-45 (многоканальный)
или электронной почтой URSS@URSS.ru
Полный каталог изданий представлен
в интернет-магазине: <http://URSS.ru>

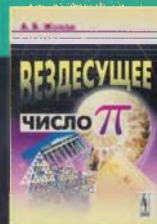
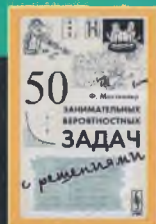
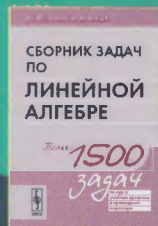
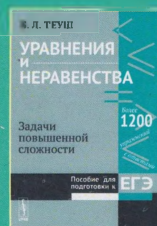
**Научная и учебная
литература**



Сергей Борисович ГАШКОВ

Доктор физико-математических наук, профессор кафедры дискретной математики МГУ имени М. В. Ломоносова. Автор и соавтор книг «Примени математику», «Арифметика. Алгоритмы. Сложность вычислений», «Системы счисления и их применения», «Современная элементарная алгебра», «Элементарное введение в эллиптическую криптографию», «Криптографические методы защиты информации», «Занимательная компьютерная арифметика: Математика и искусство счета на компьютерах и без них» (М.: URSS) и «Занимательная компьютерная арифметика: Быстрые алгоритмы операций с числами и многочленами» (М.: URSS)

Наше издательство предлагает следующие книги:



13363 ID 170933



Издательская группа
URSS

Каталог изданий
в Интернете:
<http://URSS.ru>

E-mail: URSS@URSS.ru

117335, Москва, Телефон / факс
Нахимовский (многоканальный)
проспект, 56 +7 (499) 724 25 45

Отзывы о настоящем издании, а также обнаруженные
опечатки присылайте по адресу URSS@URSS.ru.
Ваши замечания и предложения будут учтены
и отражены на web-странице этой книги на сайте
<http://URSS.ru>